Université Claude Bernard Lyon 1
Licence « sciences et technologie »
CONTROLE FINAL
7 Janvier-durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portable sont interdits

Question 1. Montrer que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$$

Correction question 1.

Pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Et

$$\frac{2^{1+1} - 1 - 2}{2^1} = \frac{4 - 1 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

L'égalité est vrai au rang 1. Il reste à montrer que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2(2^{n+1} - n - 2) + n + 1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+2} - 2n - 4 + n + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+2} - (n+1) - 2}{2^{n+1}}$$

Ce qui achève la démonstration

Question 2.

1. Calculer le pgcd de 225 et de 123.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $225u + 123v = pgcd(225,123)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de $225x + 123y = 9$

Correction question 2.

1. Première méthode

$$225 = 3^2 \times 5^2 \quad \text{et} \quad 123 = 3 \times 41$$

Donc le pgcd de 225 et de 123 est 3

Deuxième méthode, avec l'algorithme d'Euclide

$$225 = 1 \times 123 + 102$$
$$123 = 1 \times 102 + 21$$
$$102 = 4 \times 21 + 18$$
$$21 = 1 \times 18 + 3$$
$$18 = 6 \times 3 + 0$$

Le pgcd rechercher est le dernier reste non nul, donc 3.

2. Pour trouver une solution de cette équation, nous allons utiliser les égalités ci-dessus

$$3 = 21 - 1 \times 18 = 21 - 1 \times (102 - 4 \times 21) = -1 \times 102 + 5 \times 21$$
$$= -1 \times 102 + 5(123 - 1 \times 102) = 5 \times 123 - 6 \times 102$$
$$= 5 \times 123 - 6(225 - 1 \times 123) = -6 \times 225 + 11 \times 123$$

Donc $(u, v) = (-6,11)$ convient.

3. Multiplions l'égalité ci-dessus par 3

$$-18 \times 225 + 33 \times 123 = 9 \quad L_1$$
$$225x + 123y = 9 \quad L_2$$

$L_2 - L_1$ donne $225(x+18)+123(y-33)=0$, ce qui équivaut à

$$225(x+18)=123(33-y)$$

Puis on simplifie par le pgcd de 225 et de 123, c'est-à-dire 3

$$75(x+18)=41(33-y)$$

D'après le théorème de Gauss, comme 75 et 41 sont premiers entre eux
75 divise $33-y$, par conséquent il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $33-y=75k$, soit aussi $y=33-75k$
On remplace $33-y=75k$ dans $75(x+18)=41(33-y)$, ce qui donne

$$75(x+18)=41\times 75k$$

Puis on simplifie par 75, pour obtenir $x+18=41k$, soit aussi $x=-18+41k$
Ensuite on fait la réciproque, voilà, c'est fait ! L'ensemble de solutions est

$$(x,y)=(-18+41k,33-75k),\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Question 3.

1. Ecrire $2i$ sous forme exponentielle, et donner l'ensemble des solutions de $z^3=2i$, pour $z\in\mathbb{C}$.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $-5+12i$ sous forme algébrique.
   (b) Résoudre, pour $z\in\mathbb{C}$, l'équation
   $$z^2+(-4+i)z+5-5i=0$$
3. Donner un polynôme dans $\mathbb{C}[Z]$ dont les zéros sont précisément les valeurs de z trouvé en 1. et 2 (b).

Correction question 3.

1. $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z^3=2e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=2\\ \arg(z^3)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2\\ 3\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{3}}\\ \arg(z)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}};\ \ z_1=2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}};\ \ \ z_2=2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{9\pi}{6}}=2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2^{\frac{1}{3}}i$$

2. (a)
On cherche les deux complexes $a+ib$ tels que

$$(a+ib)^2=-5+12i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-5+12i\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-5\\ 2ab=12\end{cases}$$

En écrivant l'égalité entre les modules dans l'égalité $(a+ib)^2=-5+12i$

$$|(a+ib)^2|=\sqrt{5^2+12^2}\Leftrightarrow|a+ib|^2=\sqrt{24+144}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{169}\Leftrightarrow a^2+b^2=13\quad L_3$$

En calculant L_1+L_3, on obtient $2a^2=8$, donc $a^2=4$ et $a=\pm2$
En calculant L_3-L_1, on obtient $2b^2=18$, donc $b^2=9$ et $b=\pm3$
La ligne L_2 impose que a et b sont de même signe, les deux solutions recherchées sont

$$2+3i\qquad\text{et}\qquad -2-3i$$

(b)

$$\Delta=(-4+i)^2-4(5-5i)=16-1-8i-20+20i=-5+12i=(2+3i)^2$$

Les deux solutions sont donc

$$z_3=\frac{-(-4+i)-(2+3i)}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$$

Et

$$z_3=\frac{-(-4+i)+(2+3i)}{2}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

3.

$$\begin{aligned}P(z)&=(z^3-2i)(z^2+(-4+i)z+5-5i)\\&=z^5+(-4+i)z^4+(5-5i)z^3-2iz^2+(2+8i)z-10-10i\end{aligned}$$

Question 4. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y) = (2x - y, x + 3y)$

1. On pose $\vec{\imath} = (1,0), \vec{\jmath} = (0,1)$. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Donner la matrice de f^{-1} dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. On pose $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (0,2)$
   (a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   (b) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Soit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$
   (b) Calculer l'image du vecteur $(2,3)$ par $f \circ g$.

Correction question 4.

1. $f(\vec{\imath}) = (2,1) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = (-1,3) = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. (a) Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = f(x,y)$
$$(X,Y) = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = X \\ x + 3y = Y \end{cases}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$
Donc d'après le théorème de Cramer il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = f(x,y)$, cette application est une bijection.
(b) La matrice de f^{-1} dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est A^{-1}. Calcul de l'inverse de A.
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x' \\ x + 3y = y' \end{cases}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$
Donc d'après le théorème de Cramer il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' & -1 \\ y' & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3x' + y'}{7} = \frac{3}{7}x' + \frac{1}{7}y'$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x' \\ 1 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-x' + 2y'}{7} = -\frac{1}{7}x' + \frac{2}{7}y'$$
Ce qui s'écrit aussi
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
Donc
$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
3.
(a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b)
$$f(\vec{u}) = (2 \times 1 - 1, 1 + 3 \times 1) = (1,4) = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$$
$$f(\vec{v}) = (2 \times 0 - 2, 0 + 3 \times 2) = (-2,6) = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$$

Il reste à trouver $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme $\vec{v} = 2\vec{\jmath}$, on a $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\vec{v}$ et comme $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, on en déduit que $\vec{\imath} = \vec{u} - \vec{\jmath} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

$$f(\vec{u}) = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + 4 \times \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$

$$f(\vec{v}) = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = -2 \times \left(\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) + 6 \times \frac{1}{2}\vec{v} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$$

La matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

4.

(a) La matrice de $f \circ g$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Les coordonnées de $f \circ g(2,3)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $f \circ g(2,3) = (4,9)$