Contrôle continu final
Analyse I

14 Janvier 2013-Durée 2h

La qualité de la rédaction et la présentation seront notées sur 2 points

2 : très bon

1,5 : bon

1 : moyen

0,5 : mauvais

0 : très mauvais

Exercice 1. (1 point)

Question de cours : Rappelez ce qu'est une suite de Cauchy et le lien entre suite convergentes et suites de Cauchy

Correction exercice 1.

Il s'agit d'une suite qui vérifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p > n \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$$

Une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle converge.

Exercice 2. (8 points)

(Les parties 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes)

On se donne une suite réelle (u_n) et on construit la suite

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

On désire étudier la convergence de la suite (V_n) dans certain cas.

1. Soit q un réel fixé. On pose $u_n = q^n$.
   a. Montrez que
   $$V_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
   Pour $q \neq 1$. Que vaut V_n pour $q = 1$.
   b. En distinguant les cas $|q| < 1$, $q > 1$, $q < -1$, $q = -1$ et $q = 1$, dire si la suite (V_n) converge ? Et quelle sa limite le cas échéant.
2. On pose maintenant $u_n = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.
   a. Montrer que $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
   b. En déduite que la suite (V_n) ne converge pas.
3. On pose maintenant $u_n = \frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.
   a. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b. Montrer par récurrence que $V_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
   c. En déduire que la suite (V_n) converge.
4. On revient au cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générale. Montrez que si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers une limite finie) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (Aide : regardez $V_{n+1} - V_n$)

Correction exercice 2.

1.
   a. Si $q \neq 1$. Par récurrence, pour $n = 0$
   $$V_0 = q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$$
   Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n = 1$
   $$V_{n+1} = V_n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + (q-1)q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$
   Ce qui achève la récurrence donc pour tout $n \geq 0$

$$V_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Si $q = 1$

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

b. Si $|q| < 1$ alors $q^{n+1} \to 0$ donc $V_n \to \frac{1}{1-q}$

Si $q > 1$ alors $q^{n+1} \to +\infty$ et $q - 1 < 0$, donc

$$V_n \to +\infty$$

Si $q < -1$ alors q^{n+1} n'a pas de limite et V_n n'a pas de limite n'ont plus.

Si $q = -1$ alors $q^{n+1} = (-1)^{n+1}$ n'a pas de limite et V_n n'a pas de limite n'ont plus.

Si $q = 1$ alors $V_n = n + 1 \to +\infty$.

2.

a. Pour tout $k \in \{1,2, \dots, n\}$ $n + k \geq 2n$ donc

$$V_{2n} - V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

b. Soit cela contredit le critère de Cauchy en prenant $\epsilon = \frac{1}{4}$ et $p = 2n$

Soit on suppose que $V_n \to l$ alors $V_{2n} \to l$ et en passant à la limite dans

$$V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2}$$

On trouve

$$l - l \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui est faux.

Par conséquent la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

3.

a.

$$V_{n+1} - V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

Par conséquent la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b. Pour $n = 1$

$$V_1 = u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$$

Donc l'inégalité est vraie pour $n = 1$

Montrons que l'inégalité au rang n entraine celle au rang $n + 1$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Calculons

$$\frac{-1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{-n(n+1) + (n+1)^2 - n}{n(n+1)^2}$$
$$= \frac{-n^2 - n + n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0$$

Donc

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < -\frac{1}{n+1}$$

Par conséquent

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Ce qui achève la récurrence, et pour tout $n \geq 1$

$$V_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

c. D'après b. $V_n < 2$

La suite est croissante d'après a. et majorée d'après b., elle converge.

4.

$$V_{n+1} - V_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = u_{n+1}$$

$V_n \to l$ entraine que $V_{n+1} \to l$, puis en passant à la limite dans

$$V_{n+1} - V_n = u_{n+1}$$

On obtient $u_{n+1} \to l - l = 0$ ce qui entraine que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 3. (12 points)

(Les parties 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes)

On se propose d'étudier la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x = e^{x\ln|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Définie sur $\mathbb{R}$.

1.
   a. Etudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Quelle est la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$?
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Montrez que la dérivée de f en tout point de $\mathbb{R}^*$ est

$$f'(x) = (1 + \ln(|x|)\, e^{x\ln(x)}$$

3.
   a. Montrez que la fonction f admet un maximum local et un minimum local, que l'on précisera, en deux points a et b, respectivement, que l'on précisera.
   b. Montrez que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.
4. Décrire la solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y' = (1 + \ln(x))y$$

   Avec $y(1) = 2$
5.
   a. Montrez que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)} = 1$$

   b. En déduire que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h} = -\infty$$

   c. En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0
6. Question difficile : On note g la fonction réciproque de f, définie sur $[f(b), f(a)]$. La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? (Ne chercher pas à calculer g' explicitement).

Correction exercice 3.

1.
   a. Pour tout $x \neq 0$ la fonction est continue.

$$\lim_{x\to 0} x\ln(|x|) = 0$$

   Les fonctions puissances l'emportent sur le logarithme. Donc

$$\lim_{x\to 0} e^{x\ln(|x|)} = e^0 = 1 = f(0)$$

   Donc la fonction est continue en 0.

   b.

$$\lim_{x\to -\infty} x\ln(|x|) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{x\ln(|x|)} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln(|x|) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{x\ln(|x|)} = +\infty$$

2. f est le produit et la composée de fonctions dérivables donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   La dérivée de $x \to x\ln(|x|)$ est $x \to \ln(|x|) + x \times \frac{1}{x} = \ln(|x|) + 1$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = (\ln(|x|) + 1)e^{x\ln(|x|)}$$

3.

a. Pour $x < 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(|x|) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(-x) = -1 \Leftrightarrow -x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(-x) + 1 < 0 \Leftrightarrow -x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \frac{-1}{e}$$

De même $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{e}$, il s'agit donc d'un maximum local.

Pour $x > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(|x|) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

De même $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$, il s'agit donc d'un minimum local.

b. On a vu que $\forall x \in \left]\frac{-1}{e}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f'(x) < 0$, la fonction est donc décroissante sur chacun de ces deux intervalles, comme elle est continue sur $\left[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ elle est strictement décroissante sur cet ensemble. f est donc une bijection décroissante de $\left[\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ sur $\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{-1}{e}\right)\right]$

Avec

$$f\left(\frac{-1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}\ln\left(\left|-\frac{1}{e}\right|\right)} = e^{-\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{\frac{1}{e}}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{-\frac{1}{e}}$$

4.

$$\frac{y'}{y} = 1 + \ln(x) \Rightarrow \ln(|y|) = x\ln(x) + K$$

Car on a vu précédemment que la dérivée de $x \to x\ln(x)$ était $x \to 1 + \ln(x)$

Par conséquent

$$y = \lambda e^{x\ln(x)}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = \lambda e^{1\times\ln(1)} = \lambda$$

Donc $\lambda = 2$ et

$$y = 2e^{x\ln(x)}$$

5.

a. On rappelle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Comme $h\ln(h) \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)} = 1$$

b.

$$\frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h} = \ln(h)\frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)}$$

$\ln(h) \to -\infty$ et le quotient tend vers 1 donc

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h} = -\infty$$

c. Le taux de variation de la fonction f tend vers $-\infty$ en 0^+ donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

6. $\forall x \in \left]\frac{-1}{e}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $f'(x) < 0$ donc n'est pas nulle. D'autre part $f(0) = 1$ entraine que $g(1) = 0$ donc

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

f' est aussi continue sur cet ensemble et

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \lim_{t\to 0}(\ln(|t|) + 1)e^{t\ln(|t|)} = -\infty$$

Comme

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 0$$

donc

$$\lim_{x \to 1} g'(x) = 0$$

Ce qui montre que g est dérivable en 1 et que sa dérivée vaut 0.