Contrôle continu final
Analyse I

14 Janvier 2013-Durée 2h

La qualité de la rédaction et la présentation seront notées sur 2 points

2 : très bon

1,5 : bon

1 : moyen

0,5 : mauvais

0 : très mauvais

Exercice 1. (1 point)

Question de cours : Rappelez ce qu'est une suite de Cauchy et le lien entre suite convergentes et suites de Cauchy

Exercice 2. (8 points)

(Les parties 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes)

On se donne une suite réelle (u_n) et on construit la suite

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

On désire étudier la convergence de la suite (V_n) dans certain cas.

1. Soit q un réel fixé. On pose $u_n = q^n$.
   a. Montrez que
   $$V_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
   Pour $q \neq 1$. Que vaut V_n pour $q = 1$.
   b. En distinguant les cas $|q| < 1$, $q > 1$, $q < -1$, $q = -1$ et $q = 1$, dire si la suite (V_n) converge ? Et quelle sa limite le cas échéant.
2. On pose maintenant $u_n = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.
   a. Montrer que $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
   b. En déduite que la suite (V_n) ne converge pas.
3. On pose maintenant $u_n = \frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_0 = 0$.
   a. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   b. Montrer par récurrence que $V_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
   c. En déduire que la suite (V_n) converge.
4. On revient au cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générale. Montrez que si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers une limite finie) alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (Aide : regardez $V_{n+1} - V_n$)

Exercice 3. (12 points)

(Les parties 1), 2), 3) et 4) sont indépendantes)

On se propose d'étudier la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x = e^{x\ln|x|} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Définie sur $\mathbb{R}$.

1.
   a. Etudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Quelle est la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$?
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Montrez que la dérivée de f en tout point de $\mathbb{R}^*$ est
   $$f'(x) = (1 + \ln(|x|)\, e^{x\ln(|x|)}$$
3.
   a. Montrez que la fonction f admet un maximum local et un minimum local, que l'on précisera, en deux points a et b, respectivement, que l'on précisera.
   b. Montrez que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

4. Décrire la solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y' = (1 + \ln(x))y$$
Avec $y(1) = 2$
5.
   a. Montrez que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h\ln(h)} = 1$$
   b. En déduire que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h\ln(h)} - 1}{h} = -\infty$$
   c. En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0
6. Question difficile : On note g la fonction réciproque de f, définie sur $[f(b), f(a)]$. La fonction g est-elle dérivable au point 1 ? (Ne chercher pas à calculer g' explicitement).