CCF 2012

Exercice 1.

1. Exprimer $\sin(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.
2. Montrer que si $x \notin 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}$, alors
$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^3}\right)\right)\dots\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Correction exercice 1.

1. $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$
2. Par recurrence

   Pour $n=1$, $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ entraine que $\frac{x}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0$
$$\frac{\sin(x)}{2^1\sin\left(\frac{x}{2^1}\right)}=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
   L'égalité est vraie au rang 1

   Montrons que l'égalité au rang n entraine au rang $n+1$. $x \notin 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}$ entraine $\frac{x}{2^{n+1}} \notin \pi\mathbb{Z}$ et donc $\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\neq 0$.
$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^3}\right)\right)\dots\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
$$=\frac{\sin(x)}{2^n\times 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)=\frac{\sin(x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

Exercice 2.

Résoudre l'équation
$$z^2-(4+i)z+5+5i=0$$

Correction exercice 2.
$$\Delta=(4+i)^2-4(5+5i)=16+8i-1-20-20i=-5-12i$$
Première méthode
$$\Delta=4-2\times 2\times 3i-9=(2-3i)^2$$
Deuxième méthode

On cherche $\Delta=\delta$ sous la forme $\delta=a+ib$, en élevant au carré
$$(a+ib)^2=-5-12i\quad(*)$$

$$a^2-b^2+2iab=-5-12i\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-5\\ 2ab=-12\end{cases}$$
En prenant le module de $(*)$
$$L_3:\quad a^2+b^2=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$
L_1+L_3 entraine que $2a^2=8$ donc $a=\pm 2$

L_3-L_1 entraine que $2b^2=18$ donc $b=\pm 3$

L_2 entraine que a et b ne sont pas de même signe, par conséquent
$$\delta=\pm(2-3i)$$
Les deux solutions de l'équation
$$z_1=\frac{4+i-(2-3i)}{2}=1+2i$$

$$z_2 = \frac{4 + i + (2 - 3i)}{2} = 3 - i$$

Exercice 3.

On considère maintenant la transformation $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où l'on a identifié $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, telle que

$$f(z) = 2\overline{z} + 3 - 4i$$

1. Calculer le(s) point(s) invariant(s) de f.
2. Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $1 - i$ et de rayon 2.
3. Calculer $f(1 - i)$. En déduire l'équation de l'image de $\mathcal{C}$ par la transformation f.

Bonus : Quelle est la nature de l'application f ?

Correction exercice 3.

1. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels

$$f(z) = z \Leftrightarrow 2\overline{z} + 3 - 4i = z \Leftrightarrow 2(x - iy) + 3 - 4i = x + iy \Leftrightarrow x - 3iy = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Il n'existe qu'un seul point fixe $\omega = -3 - \frac{4}{3}i$

2. $|z - (1 - i)| = 2$ ou si on pose $z = x + iy$ l'équation est $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
3. $f(1 - i) = 2\overline{(1 - i)} + 3 - 4i = 2(1 + i) + 3 - 4i = 5 - 2i$

$$\begin{aligned}|f(z) - (5 - 2i)| &= |2\overline{z} + 3 - 4i - 5 + 2i| = |2\overline{z} - 2 - 2i| = 2|\overline{z} - 1 - i| = 2\left|\overline{\overline{z} - 1 - i}\right| \\ &= 2|z - 1 + i| = 2|z - (1 - i)| = 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

Bonus

$$\begin{aligned}f(z) - f(\omega) = f(z) - \omega = 2\overline{z} + 3 - 4i - \omega &= 2\overline{z} + 3 - 4i - \left(-3 - \frac{4}{3}i\right) = 2\overline{z} + 6 + \left(-4 + \frac{4}{3}\right)i \\ &= 2\overline{z} + 6 - \frac{8}{3}i = 2\left(\overline{z} - \left(-3 + \frac{4}{3}i\right)\right) = 2(\overline{z} - \overline{\omega}) = 2\overline{z - \omega}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$f(z) - \omega = f(z) - f(\omega) = 2\overline{z} + 3 - 4i - (2\overline{\omega} + 3 - 4i) = 2\overline{z - \omega} + 3 - 4i = f(z - \omega)$$

La transformation s

$$u - \omega \to \overline{u - \omega} \quad (\text{ou } u \to \overline{u - \omega} + \omega)$$

Est la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{R}e(\omega) = -3$

La transformation h

$$v \to 2v$$

Est une homothétie de rapport 2

$$f = h \circ s$$

Exercice 4.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) on considère la droite passant par $A: (1,2,3)$ et dirigée par $u = e_1 + e_2 + e_3$ et la droite d' passant par A dirigée par $v = e_1 + 2e_2 + e_3$ déterminer une équation cartésienne du plan contenant d et d'.

Correction exercice 4.

Un vecteur orthogonal à ces deux droites est $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un point $M: (x, y, z)$ appartenant au plan orthogonal à ces deux droite et passant par A vérifie

$$\overrightarrow{AM}.\vec{w} = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \times (-1) + (y - 2) \times 0 + (z - 3) \times 1 = 0 \Leftrightarrow -x + z - 2 = 0$$

Ce qui est une équation du plan orthogonal à d et d' et passant par A.

Exercice 5.

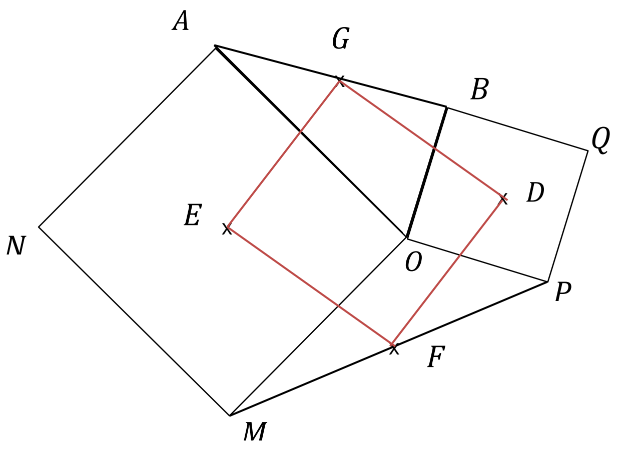
On choisit un repère orthonormé d'origine O. On note A le point d'affixe a.

1. Soit $(ABCD)$ un quadrilatère. On note A', B', C' et D' les milieux des côtés $[A,B]$, $[B,C]$, $[C,D]$ et $[DA]$, respectifs. Montrer que (A',B',C',D') est un parallélogramme.
   Indication : Calculer les affixes a', b', c' et d' en fonction des affixes a, b, c et d

2. Soit (OAB) un triangle non aplati. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $(BOPQ)$ et $(AOMN)$. On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de $[A,B]$ et F le milieu de $[M,P]$.
   a. Calculer g. Montrer que $m=\pm ia$ (Le signe dépend de l'orientation de la figure). En déduire une expression simple de e. Calculer de même d.
   b. Montrer que $d-g=\pm i(e-g)$ (même remarque sur le signe).
   c. Utiliser la partie 1. pour montrer que $(EGDF)$ est un parallèlogramme. Montrer enfin que c'est un carré.

Correction exercice 5.

1. L'affixe de A' est $\frac{a+b}{2}$, celle de B' est $\frac{b+c}{2}$, celle de C' est $\frac{c+d}{2}$ et celle de D' est $\frac{d+a}{2}$
   Donc l'affixe de $\overrightarrow{A'B'}$ est $\frac{b+c}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{c-a}{2}$ et l'affixe de $\overrightarrow{D'C'}$ est $\frac{c+d}{2}-\frac{d+a}{2}=\frac{c-a}{2}$
   Ce qui montre que $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{D'C'}$ ce qui suffit pour affirmer que $(A'B'C'D')$ est un parallélogramme.
2.



   a. $g=\frac{a+b}{2}$
   M est l'image de A par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O, l'image d'un complexe z quelconque est
   $$r(z)-0=e^{\frac{i\pi}{2}}(z-0)\Leftrightarrow r(z)=iz$$
   Donc $m=ia$
   E est le milieu de $[A,M]$ donc $e=\frac{ia+a}{2}$.
   P est l'image de B par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O, donc $p=-ib$
   D est le milieu de $[B,P]$ donc $d=\frac{b-ib}{2}$.
   b.
   $$d-g=\frac{b-ib}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{-ib-a}{2}$$
   $$e-g=\frac{ia+a}{2}-\frac{a+b}{2}=\frac{ia-b}{2}=\frac{-i(-a-ib)}{2}=-i(d-g)$$
   Donc

$$d - g = i(e - g)$$

c. Soit $(AMPB)$ un quadrilatère d'après la question 1. les milieux des côtés forment un parallélogramme donc $(EFDG)$ est un parallélogramme.

$d - g = i(e - g) = e^{i\frac{\pi}{2}}(e - g)$

Donc d est l'image de e par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre g

Ce qui fait de $(EFDG)$ est un rectangle et la norme des vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{GE}$ est la même il s'agit donc d'un carré.