CCF 2012

Exercice 1.

1. Exprimer $\sin(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.
2. Montrer que si $x \notin 2^{n+1}\pi\mathbb{Z}$, alors
$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2^3}\right)\right)\dots\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)=\frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Exercice 2.

Résoudre l'équation
$$z^2-(4+i)z+5+5i=0$$

Exercice 3.

On considère maintenant la transformation $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, où l'on a identifié $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, telle que
$$f(z)=2\overline{z}+3-4i$$

1. Calculer le(s) point(s) invariant(s) de f.
2. Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $1-i$ et de rayon 2.
3. Calculer $f(1-i)$. En déduire l'équation de l'image de $\mathcal{C}$ par la transformation f.

Bonus : Quelle est la nature de l'application f ?

Exercice 4.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) on considère la droite passant par A: $(1,2,3)$ et dirigée par $u=e_1+e_2+e_3$ et la droite d' passant par A dirigée par $v=e_1+2e_2+e_3$ déterminer une équation cartésienne du plan contenant d et d'.

Exercice 5.

On choisit un repère orthonormé d'origine O. On note A le point d'affixe a.

1. Soit $(ABCD)$ un quadrilatère. On note A', B', C' et D' les milieux des côtés $[A,B]$, $[B,C]$, $[C,D]$ et $[DA]$, respectifs. Montrer que (A',B',C',D') est un parallélogramme.
   Indication : Calculer les affixes a', b', c' et d' en fonction des affixes a, b, c et d

2. Soit (OAB) un triangle non aplati. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $(BOPQ)$ et $(AOMN)$. On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de $[A,B]$ et F le milieu de $[M,P]$.
   a. Calculer g. Montrer que $m=\pm ia$ (Le signe dépend de l'orientation de la figure). En déduire une expression simple de e. Calculer de même d.
   b. Montrer que $d-g=\pm i(e-g)$ (même remarque sur le signe).
   c. Utiliser la partie 1. pour montrer que $(EGDF)$ est un parallélogramme. Montrer enfin que c'est un carré.