Université Claude Bernard Lyon 1
Licence STS
Année 2011-2012

Analyse I :Les réels et les fonctions
Interrogation écrite, le 17 janvier 2012, de 14 heures à 16 heures

Question de cours

Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires

Allez à : Correction question de cours

Exercice 1.

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$ avec la condition initiale $y'(0) = 0$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2.

On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$$

Et son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1.
   a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est 0.
   c) En déduire que deux choses l'une :
   Ou bien
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
   Ou bien
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
2. On suppose que $-1 \leq u_0 \leq 0$
   a) Montrer que, dans ce cas, on a $-1 \leq u_n \leq 0, \forall n \geq 0$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et calculer sa limite.
3. On suppose que $u_0 > 0$. Dans ce cas, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
   On pourra utiliser par exemple la question 1.
4. On suppose que $u_0 < -1$.
   a) Montrer que $u_1 > 0$.
   b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans ce cas. On pourra utiliser par exemple la question 3.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3.

Dans ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Ecrire les termes u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Pour $n \geq 1$, calculer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer la double inégalité

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4. Etude de la réciproque de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin(x)$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   a) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. On justifiera ce fait.
   b) En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin(x)$.
   a) Montrer que $f'(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
   b) En déduire que f est strictement croissante.
4.
   a) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5.
   a) Montrer que f admet une bijection réciproque $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est continue.
   b) Quels sont les points où h est dérivable ?

Allez à : Correction exercice 4 :

CORRECTION

Correction question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in I$, avec $f(a) \neq f(b)$, pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire dans $[f(a), f(b)]$ si $f(a) < f(b)$ ou dans $[f(b), f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Allez à : Question de cours

Correction exercice 1 :

L'équation homogène est

$$y'(t) - y(t) = 0$$

Donc

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

On intègre

$$\ln|y(t)| = t + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Puis on compose par l'exponentielle

$$y(t) = \lambda e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ensuite on cherche une solution particulière de $y'(t) = y(t) = t$ sous la forme

$$y_P(t) = \lambda(t) e^t$$

Alors

$$y_P'(t) = \lambda'(t) e^t + \lambda(t) e^t$$

Ce que l'on remplace dans $y_P'(t) = y_P(t) = t$

$$\lambda'(t) e^t + \lambda(t) e^t = \lambda(t) e^t + t$$

Ce qui équivaut à

$$\lambda'(t) = te^{-t}$$

Soit on fait une intégration par partie, soit on cherche une primitive de te^{-t} sous la forme

$$\lambda(t) = (at + b)e^{-t}, \ \ a, b \in \mathbb{R}$$

On dérive

$$\lambda'(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = (-at + a - b)e^{-t}$$

Et on identifie avec $\lambda'(t) = te^{-t}$

$$-at + a - b = t \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc

$$\lambda(t) = -t - 1$$

Ce qui entraine que

$$y_P(t) = -(t + 1)e^{-t}e^{t} = -t - 1$$

Et enfin la solution générale de $y'(t) = y(t) + t$ est

$$y(t) = \lambda e^{t} - t - 1$$

Ensuite on cherche λ tel que $y'(0) = 0$, $y'(t) = \lambda e^{t} - 1$

$$y'(0) = \lambda - 1$$

Donc $\lambda = 1$, et la solution recherchée est

$$y(t) = e^{t} - t - 1$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2 :

1.

a) $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc la suite de terme général u_n est croissante.

b) Si la suite converge vers une limite l alors l vérifie

$$l = l^2 + l \Leftrightarrow 0 = l^2 \Leftrightarrow l = 0$$

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge alors la limite de cette suite est 0.

c) Soit la suite est croissante et majorée alors elle converge vers 0 (la seule limite possible), soit elle est croissante et non majorée et elle tend vers $+\infty$.

2.

a) Nous allons montrer ce résultat par récurrence, pour $n = 0$ ce l'énoncé, il reste à montrer que $-1 \leq u_n \leq 0$ entraine que $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

$$u_n^2 + u_n = u_n(u_n + 1)$$

$$-1 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u_n + 1 \leq 1$$

Comme $0 \leq -u_n \leq 1$

Donc

$$0 \leq -u_n(u_n + 1) \leq 1 \times 1 = 1$$

Par conséquent $0 \leq -u_{n+1} \leq 1$, ce qui équivaut à $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$.

Cela montre que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.

b) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 0 donc elle converge.

3. Si elle est majorée alors elle converge vers une limite $l > 0$ (car $u_n > u_0 > 0$) ce qui n'est pas possible donc d'après la question 1.c) elle tend vers l'infini.

4.

a) $u_1 = u_0^2 + u_0 = u_0(u_0 + 1)$

D'après l'hypothèse $u_0 + 1 < 0$ (et bien sûr $u_0 < 0$) donc $u_1 > 0$

b) A partir du moment où le deuxième terme est supérieur à 0 il est clair que d'après la question 3. La suite tend vers l'infini. Si on veut de la précision, on pose $v_{n+1} = u_n$ la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est toujours croissante (comme $((u_n)_{n\geq 0})$ $v_0 = u_1 > 0$ et on applique le 3. à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$

ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini, par conséquent $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3 :

1.

$$u_1 = 1 - \ln(1) = 1; u_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2)\,; v_1 = u_1 - \frac{1}{1} = 0; v_2 = u_2 - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2)$$

2.

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

3. La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème des accroissement finis sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour tout $n \geq 1$, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = (n+1-n)\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

$$n < c < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

4. D'après l'inégalité de gauche

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

D'après l'inégalité de droite

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) > 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

5.

$$u_n - v_n = \frac{1}{n}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

Les hypothèses du théorème des suites adjacentes sont vérifiées par conséquent les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4 :

1. Il faut montrer que $x < y$ entraine que $g(x) < g(y)$, si $x < y \leq 0$ c'est vrai puisque g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, de même si $0 \leq x < y$ c'est vrai puisque g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Si $x < 0 < y$ alors $g(x) < g(0)$ car g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et $g(0) < g(y)$ car g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine que $g(x) < g(y)$.

Par conséquent g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.

   a) g est dérivable sur $]-\infty, 0[$, pour tout $x < y \leq 0$, on peut appliquer le théorème des accroissement finis sur l'intervalle $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$$

Comme $y > x$ et $c \in]-\infty, 0[$ entraine que $g'(c) > 0$, donc $g(y) - g(x) > 0$ ce qui montre que g est croissante sur $]-\infty, 0]$.

g est dérivable sur $]0, +\infty[$, pour tout $0 \leq x < y$, on peut appliquer le théorème des accroissement finis sur l'intervalle $[x, y]$, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$$

Comme $y > x$ et $c \in]0, +\infty[$ entraine que $g'(c) > 0$, donc $g(y) - g(x) > 0$ ce qui montre que g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) D'après la première question g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonction continues

$$f'(x) = 3x^2 + 1 - \cos(x)$$

Si $x \neq 0$ alors $3x^2 > 0$ et $1 - \cos(x) \geq 0$ donc $f'(x) > 0$.

b) D'après la question 2.b. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4.

a)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Car $x^3 + x$ tend vers moins l'infini et $\sin(x)$ est bornée

De même

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc, comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

b) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f est injective, l'image de $\mathbb{R}$ par f est $\mathbb{R}$ donc f est surjective, par conséquent f est bijective.

5.

a) f est une bijection continue donc elle admet une bijection réciproque h continue.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la seule valeur qui annule $f'(x)$ est $x = 0$ car

$$f'(0) = 0^3 + 0 - \sin(0) = 0$$

h est dérivable en tout point $x_0 = f^{-1}(y_0)$ où $f'(y_0) \neq 0$, comme $f(0) = 0$, h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Allez à : Exercice 4