Université Claude Bernard Lyon 1
Licence STS
Année 2011-2012

Analyse I :Les réels et les fonctions
Interrogation écrite, le 17 janvier 2012, de 14 heures à 16 heures

Question de cours

Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1.

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$ avec la condition initiale $y'(0) = 0$

Exercice 2.

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + u_n$$

Et son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1.
   a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite est 0.
   c) En déduire que deux choses l'une :
   Ou bien
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
   Ou bien
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
2. On suppose que $-1 \leq u_0 \leq 0$
   a) Montrer que, dans ce cas, on a $-1 \leq u_n \leq 0$, $\forall n \geq 0$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et calculer sa limite.
3. On suppose que $u_0 > 0$. Dans ce cas, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
   On pourra utiliser par exemple la question 1.
4. On suppose que $u_0 < -1$.
   a) Montrer que $u_1 > 0$.
   b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans ce cas. On pourra utiliser par exemple la question 3.

Exercice 3.

Dans ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Ecrire les termes u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Pour $n \geq 1$, calculer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer la double inégalité
   $$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite.

Exercice 4. Etude de la réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin(x)$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   a) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. On justifiera ce fait.
   b) En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin(x)$.
   a) Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.
   b) En déduire que f est strictement croissante.
4.
   a) Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5.
   a) Montrer que f admet une bijection réciproque $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est continue.
   b) Quels sont les points où h est dérivable ?