Université Claude Bernard Lyon-1

Licence « Sciences et technologie »

Unité d'enseignement Math. I Algèbre

CONTROLE FINAL

18 Janvier 2012-durée 2h

L'énoncé comporte cinq exercices sur deux pages.
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Montrer que pour tout entier non nuls n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

Allez à : Correction question1

Question 2. Déterminer les solutions complexes z de l'équation :

$$z^2-(1+4i)z-3+3i=0$$

En déduire les solutions complexes z de l'équation

$$z^6-(1+4i)z^3-3+3i=0$$

Allez à : Correction question2

Question 3. On considère l'application $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$, $z\mapsto\frac{1}{z}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite formée des complexes z dont la partie réelle vaut $1/2$.
   a) Pour z complexe de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, calculer $|f(z)-1|$.
   b) Que peut-on dire sur l'image de $\mathcal{D}$ par f.
3. Soit $\mathcal{S}$ le cercle de centre 1 et de rayon 1, privé de l'origine 0 (c'est-à-dire l'ensemble des complexes non nuls z tels que : $|z-1|=1$.
   a) Démontrer que pour tout réel t, on a :
   $$\cos(t)=2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1\quad\text{et}\quad\sin(t)=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
   b) Soit t réel, non multiple de 2π. Calculer la partie réelle de $f(1-e^{it})$,
   c) Montrer que l'image de $\mathcal{S}$ par f est incluse dans $\mathcal{D}$.
4. Déterminer $f\circ f$. En déduire que l'on a : $f(\mathcal{D})=\mathcal{S}$ et $f(\mathcal{S})=\mathcal{D}$.

Allez à : Correction question3

Question 4.

On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z associe le point M', d'affixe

$$z'=jz+3$$

1. Déterminer les points invariants (fixes) de r, et la nature de la transformation r.
2. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2=r\circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
3. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où l'on note $r^3=r\circ r\circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Allez à : Correction question4

Question 5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct. Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, et soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites définies par :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 2y + 1 \\ z = y + 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}': \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$.
3. Déterminer un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs directeurs. En déduire les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, de norme 2.
4. Calculer les coordonnées des points A et B tels que $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{n}$ et $\overrightarrow{\Omega B} = -\vec{n}$.
5. On appelle plan tangent à $\mathcal{S}$ un plan qui passe par un point C de $\mathcal{S}$ et orthogonal à la droite (ΩC). Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Allez à : Correction question5

CORRECTION

Correction question1.

Nous allons faire un raisonnement par récurrence, pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2}$$

Et

$$1 - \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

L'égalité est vraie au rang 1.

Montrons que l'égalité au rang n entraine celle au rang $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$
$$= 1 + \frac{-n-2+n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Donc pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Allez à : Question 1

Correction question2.

$$\Delta = (1+4i)^2 - 4(-3+3i) = 1 + 8i - 16 + 12 - 12i = -3 - 4i = 1 - 4i - 4 = (1-2i)^2$$

Donc les solutions de $z^2 - (1+4i)z - 3 + 3i = 0$

Sont

$$z_1 = \frac{1 + 4i - (1-2i)}{2} = 3i \quad et \quad z_2 = \frac{1 + 4i + 1 - 2i}{2} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Les solutions de $z^6 - (1+4i)z^3 - 3 + 3i = 0$ vérifient

$$z^3 = 3i \quad \text{ou} \quad z^3 = 1 + i$$

$$z^3=3i\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=3\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=3\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=3^{\frac{1}{3}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Cela donne trois solutions

$$3^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}};\quad 3^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}\quad\text{et}\quad 3^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{9\pi}{6}}=-3^{\frac{1}{3}}i$$

$$z^3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\begin{cases}|z^3|=2^{\frac{1}{2}}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Cela donne trois solutions

$$2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\quad\text{et}\quad 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Allez à : Question 2

Correction question3.

1. Pour tout $t\in\mathbb{C}^*$ il existe un unique $z=\frac{1}{t}\in\mathbb{C}^*$ tel que

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{\frac{1}{t}}=t$$

2.

a) Si la partie réelle de z vaut $\frac{1}{2}$, il existe $y\in\mathbb{R}$ tel que $z=\frac{1}{2}+iy$, donc pour tout $y\in\mathbb{R}$:

$$|f(z)-1|=\left|\frac{1}{z}-1\right|=\left|\frac{1}{\frac{1}{2}+iy}-1\right|=\left|\frac{1-\left(\frac{1}{2}+iy\right)}{\frac{1}{2}+iy}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-iy}{\frac{1}{2}+iy}\right|=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+y^2}}=1$$

b) L'image de $\mathcal{D}$ par f est incluse dans le cercle de centre le complexe 1 et de rayon 1.

3.

a)

Première méthode :

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)^2=\frac{e^{it}+2+e^{-it}}{4}=\frac{2\cos(t)+2}{4}=\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}$$

Donc

$$\cos(t)=2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1$$

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)=2\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}{2}\right)=\frac{2}{4i}\left(\left(e^{i\frac{t}{2}}\right)^2-\left(e^{-i\frac{t}{2}}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=\sin(t)$$

Deuxième méthode :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

Pour $a=b=\frac{t}{2}$

$$\cos(t)=\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)=2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

Pour $a=b=\frac{t}{2}$

$$\sin(t)=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

b) Un point du cercle $\mathcal{S}$ vérifie $|z-1|=1$ donc il existe $t\in\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}\}$, tel que $z-1=e^{it}$, ce qui équivaut à $z=1+e^{it}$, car pour $t=(2k+1)\pi$ on a $e^{it}=-1$ et donc $z=0$ qui n'est pas dans $\mathcal{S}$.

$$f\left(1-e^{it}\right)=\frac{1}{1-e^{it}}=\frac{1-e^{-it}}{(1-e^{it})(1-e^{-it})}=\frac{1-\cos(t)+i\sin(t)}{1-e^{it}-e^{-it}+e^{it}e^{-it}}=\frac{1-\cos(t)+i\sin(t)}{2-2\cos(t)}$$
$$=\frac{1-\cos(t)}{2-2\cos(t)}+i\,\frac{\sin(t)}{2-2\cos(t)}=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sin(t)}{2-2\cos(t)}$$

Donc

$$\mathcal{Re}\left(f\left(1-e^{it}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

Donc l'image de $\mathcal{S}$ est incluse dans la droite $\mathcal{D}$.

4.

$$\forall z\in\mathbb{C}^*, f\circ f(z)=f\big(f(z)\big)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\frac{1}{z}}=z$$

Donc

$$f\circ f=Id_{\mathbb{C}^*}$$

On a

$$f(\mathcal{D})\subset\mathcal{S}$$

Cela entraine que

$$f\big(f(\mathcal{D})\big)\subset f(\mathcal{S})$$

Or $f\big(f(\mathcal{D})\big)=\mathcal{D}$ et $f(\mathcal{S})\subset\mathcal{D}$, cela donne

$$\mathcal{D}\subset f(\mathcal{S})\subset\mathcal{D}$$

Ce qui entraine que $f(\mathcal{S})=\mathcal{D}$, on compose cela par f

$$f\big(f(\mathcal{S})\big)=f(\mathcal{D})$$

Comme $f\big(f(\mathcal{S})\big)=\mathcal{S}$, par conséquent

$$\mathcal{S}=f(\mathcal{D})$$

Allez à : Question 3

Correction question4.

1.

$$r(M)=M\Leftrightarrow jz+3=z\Leftrightarrow z(1-j)=3\Leftrightarrow z=\frac{3}{1-j}=3\frac{j^2-1}{(1-j)(1-j^2)}=3\frac{1-j^2}{1-j^2-j+j^3}$$
$$=3\frac{1-j^2}{1+1+1}=1-j^2=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. L'affixe de $M''=r^2(M)$ est :

$$z''=jz'+3$$

Où

$$z'=jz+3$$

Donc

$$z''=j(jz+3)+3=j^2z+3(j+1)=j^2z-3j^2$$

L'affixe de $r^2(M)$ est de la forme $az+b$ avec $|a|=|j^2|=1$, il s'agit d'une rotation.

3. L'affixe de $M''' = r^3(M)$ est z''' avec
$$z''' = jz'' + 3 = j(j^2 z - 3j^2) + 3 = j^3 z - 3j^3 + 3 = z$$
Ce qui montre que $r^3 = id$ par conséquent $r^{-1} = r^2$ est une rotation.

Allez à : Question 4

Correction question5.

1.
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + z^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$
$\mathcal{S}$ est la sphère de centre Ω $(2,1,0)$ et de rayon 2.

2.
$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ z = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ y = y \\ z = y + 4 \end{cases}$$
Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par $(1,0,4)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (2,1,1)$.
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y = 2x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x - 9 + z + 1 = 0 \\ y = 2x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + 8 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x + 9 \\ z = x + 8 \end{cases}$$
Donc $\mathcal{D}'$ est la droite passant par $(0,9,8)$ de vecteur directeur $\vec{v} = (1,2,1)$

3. Un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est $\vec{u} \wedge \vec{v}$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\|(-1,-1,3)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$
Donc
$$\vec{n} = \frac{2}{\sqrt{11}}(-1,-1,3)$$

Remarque :
$$\vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{11}}(-1,-1,3)$$
Est aussi une bonne réponse.

4.
$$\overrightarrow{\Omega A} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = -\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ y_A - 1 = -\dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ z_A = \dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ y_A = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ z_A = \dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{cases}$$
Donc $A\left(2 - \frac{2}{\sqrt{11}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{6}{\sqrt{11}}\right)$

$$\overrightarrow{\Omega B} = -\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ y_A - 1 = \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ z_A = -\dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ y_A = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{11}} \\ z_A = -\dfrac{6}{\sqrt{11}} \end{cases}$$
Donc $B\left(2 + \frac{2}{\sqrt{11}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$

5.

Première solution

On cherche les points $N\ (x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{AN}$ soient orthogonaux et les points $N\ (x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient orthogonaux.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AN} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2-\frac{2}{\sqrt{11}}-2\right)\left(x-\left(2-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\right) \\
&+\left(1-\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)\left(y-\left(1-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\right)+\left(\frac{6}{\sqrt{11}}-0\right)\left(z-\frac{6}{\sqrt{11}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-2+\frac{2}{\sqrt{11}}\right)-\frac{2}{\sqrt{11}}\left(y-1+\frac{2}{\sqrt{11}}\right)+\frac{6}{\sqrt{11}}\left(z-\frac{6}{\sqrt{11}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{11}}x-\frac{2}{\sqrt{11}}y+\frac{6}{\sqrt{11}}z+\frac{4}{\sqrt{11}}-\frac{4}{11}+\frac{2}{\sqrt{11}}-\frac{4}{11}-\frac{36}{11}=0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{11}}x-\frac{2}{\sqrt{11}}y+\frac{6}{\sqrt{11}}z+\frac{6}{\sqrt{11}}-4=0 \\
&\Leftrightarrow -2x-2y+6z+6-4\sqrt{11}=0 \Leftrightarrow -x-y+3z+3-2\sqrt{11}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega B}.\overrightarrow{BN} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2+\frac{2}{\sqrt{11}}-2\right)\left(x-\left(2+\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\right) \\
&+\left(1+\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)\left(y-\left(1+\frac{2}{\sqrt{11}}\right)\right)+\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}-0\right)\left(z+\frac{6}{\sqrt{11}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{11}}\left(x-2-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)+\frac{2}{\sqrt{11}}\left(y-1-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)-\frac{6}{\sqrt{11}}\left(z+\frac{6}{\sqrt{11}}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{11}}x+\frac{2}{\sqrt{11}}y-\frac{6}{\sqrt{11}}z-\frac{4}{\sqrt{11}}-\frac{4}{11}-\frac{2}{\sqrt{11}}-\frac{4}{11}-\frac{36}{11}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{11}}x+\frac{2}{\sqrt{11}}y-\frac{6}{\sqrt{11}}z-\frac{6}{\sqrt{11}}-4=0 \\
&\Leftrightarrow 2x+2y-6z-6-4\sqrt{11}=0 \Leftrightarrow x+y-3z-3-2\sqrt{11}=0
\end{aligned}$$

Deuxième solution

Les plans parallèles à $\mathcal{P}$ sont de la forme $-x-y+3z+d=0$, on cherche les points $N\ (x,y,z)$ qui sont dans $\mathcal{P}$ et dans la sphère et tels que $\overrightarrow{\Omega N}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou ce qui revient au même que $\overrightarrow{\Omega N}$ soit proportionnel à $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega N} = \lambda(-1,-1,3)$$

Donc

$$\begin{cases} x-2=-\lambda \\ y-1=-\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$$

On remplace ces trois équations dans celle de $\mathcal{S}$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=4 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda^2+9\lambda^2=4 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{4}{11} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{11}}$$

Il y a deux points N qui vérifient ces conditions

$$N_1\ \left(2-\frac{2}{\sqrt{11}},1-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{6}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{et} \quad N_2\ \left(2+\frac{2}{\sqrt{11}},1+\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{6}{\sqrt{11}}\right)$$

Pour trouver les plans, il suffit de remplacer les coordonnées de N_1 (puis de N_2) dans

$$-x - y + 3z + d = 0$$

Avec N_1

$$-\left(2 - \frac{2}{\sqrt{11}}\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{11}}\right) + 3 \times 3\frac{2}{\sqrt{11}} + d = 0 \Leftrightarrow \frac{22}{\sqrt{11}} - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2\sqrt{11} + 3$$

$$-x - y + 3z - 2\sqrt{11} + 3 = 0$$

Avec N_2

$$-\left(2 + \frac{2}{\sqrt{11}}\right) - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{11}}\right) - 3 \times 3\frac{2}{\sqrt{11}} + d = 0 \Leftrightarrow -\frac{22}{\sqrt{11}} + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 11\sqrt{\frac{4}{11}} - 3$$

$$-x - y + 3z + 2\sqrt{11} - 3 = 0$$

Allez à : Question 5