Université Claude Bernard Lyon-1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Math. I Algèbre
CONTROLE FINAL
18 Janvier 2012-durée 2h

L'énoncé comporte cinq exercices sur deux pages.
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Question 1. Montrer que pour tout entier non nuls n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Question 2. Déterminer les solutions complexes z de l'équation :

$$z^2 - (1+4i)z - 3 + 3i = 0$$

En déduire les solutions complexes z de l'équation

$$z^6 - (1+4i)z^3 - 3 + 3i = 0$$

Question 3. On considère l'application $f: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z \mapsto \frac{1}{z}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite formée des complexes z dont la partie réelle vaut $1/2$.
    a) Pour z complexe de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, calculer $|f(z) - 1|$.
    b) Que peut-on dire sur l'image de $\mathcal{D}$ par f.
3. Soit $\mathcal{S}$ le cercle de centre 1 et de rayon 1, privé de l'origine 0 (c'est-à-dire l'ensemble des complexes non nuls z tels que : $|z - 1| = 1$.
    a) Démontrer que pour tout réel t, on a :
    $$\cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
    b) Soit t réel, non multiple de 2π. Calculer la partie réelle de $f\left(1 - e^{it}\right)$,
    c) Montrer que l'image de $\mathcal{S}$ par f est incluse dans $\mathcal{D}$.
4. Déterminer $f \circ f$. En déduire que l'on a : $f(\mathcal{D}) = \mathcal{S}$ et $f(\mathcal{S}) = \mathcal{D}$.

Question 4.
On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z associe le point M', d'affixe

$$z' = jz + 3$$

1. Déterminer les points invariants (fixes) de r, et la nature de la transformation r.
2. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
3. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où l'on note $r^3 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Question 5. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct. Soit $\mathcal{S}$ la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, et soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites définies par :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 2y + 1 \\ z = y + 4 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}': \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon de $\mathcal{S}$.
2. Déterminer des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$.
3. Déterminer un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs directeurs. En déduire les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, de norme 2.
4. Calculer les coordonnées des points A et B tels que $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{n}$ et $\overrightarrow{\Omega B} = -\vec{n}$.
5. On appelle plan tangent à $\mathcal{S}$ un plan qui passe par un point C de $\mathcal{S}$ et orthogonal à la droite (ΩC). Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.