Contrôle continu final automne 2010

Exercice 1.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 7, en 0 de $x^2\cos(x)-\sin^2(x)$
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$ et en déduire sa limite en 0.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer
$$I=\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx$$
2. A l'aide du changement de variable $t=e^x$ calculer
$$J=\int_1^2 \frac{dx}{\mathrm{sh}(x)}$$
3. A l'aide du changement de variable $t=\sin(x)$ calculer
$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\sin^4(x)\,dx$$
On commencera par écrire
$$\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$
4. Calculer l'intégrale
$$L=\int_2^3 \frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $I=]1,+\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x\in I$, par
$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt$$
On ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t\in I$,
   $$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$
   On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

   b) En déduire l'existence et la valeur de
   $$\lim_{x\to1^+}f(x)$$

Allez à : Correction exercice 3

CORRECTION

Correction exercice 1.

1.

$$x^2\cos(x)-\sin^2(x)=x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\right)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{36}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-\left(x^2-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^4+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{36}+\frac{1}{120}\right)x^6+o(x^7)\right)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^7)-\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^7)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^4+\left(\frac{1}{24}-\frac{2}{45}\right)x^6+o(x^7)=-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)$$

2.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\cos(x)-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$

Il faut alors faire un développement limité à l'ordre 7 de $x^2\sin^2(x)$

$$x^2\sin^2(x)=x^2\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)\right)=x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)$$

En reprenant le calcul du développement de $\sin^2(x)$ fait ci-dessus.

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\cos(x)-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}=\frac{-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)}{x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)}=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=\frac{-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{360}x^6+o(x^7)}{x^4-\frac{1}{3}x^6+o(x^7)}=\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

La première (et plus délicate) partie est finie, il faut trouver le développement limité d'un quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas. On peut faire une division suivant les puissance croissante mais ici on peut appliquer la formule $\frac{1}{1+X}$, cela me parait plus simple.

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

Avec $X=-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$, $X^2=o(x^3)$ et $o(X^2)=o(x^3)$. On remarquera qu'un développement limité à l'ordre 1 du développement limité de $\frac{1}{1+X}=1-X+o(X)$ pose un problème parce que $o(X)=o(x^2)$ or on souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3)}=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2+o(X^2)$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=1-\left(-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)+o(x^3)+o(x^3)=1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)$$

On en déduit que :

$$\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^3)}$$

$$=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{360}x^2+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{18}-\frac{1}{360}\right)x^2+o(x^3)$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)$$

Et enfin

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}-\frac{7}{120}x^2+o(x^3)\right)=-\frac{1}{6}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1.

$$I=\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx$$

$\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx$	
$u'(x)=2x$	$u(x)=x^2$
$v(x)=\arctan(x)$	$v'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
$\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx=[x^2\arctan(x)]_0^1-$	$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx=[x^2\arctan(x)]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=1^2\times\arctan(1)-0-\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-[x-\arctan(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$$

2.

$$t=e^x\Leftrightarrow \ln(t)=x\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$$

$$x=1\Rightarrow t=e$$

$$x=2\Rightarrow t=e^2$$

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}=\frac{t^2-1}{2t}$$

$$\int_1^2\frac{dx}{\mathrm{sh}(x)}=\int_e^{e^2}\frac{2t}{t^2-1}\frac{dt}{t}=\int_e^{e^2}\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)}=\frac{a}{t-1}+\frac{b}{t+1}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{2}{t+1}\right]_{t=1}=1$$

On multiplie par $t+1$, puis $t=-1$

$$b=\left[\frac{2}{t-1}\right]_{t=-1}=-1$$

$$J=\int_e^{e^2}\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=[\ln|t-1|-\ln|t+1|]_e^{e^2}=\left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_e^{e^2}$$
$$=\ln\left(\frac{e^2-1}{e^2+1}\right)-\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)=\ln\left(\frac{e^2-1}{e^2+1}\times\frac{e+1}{e-1}\right)=\ln\left(\frac{(e+1)^2}{e^2+1}\right)$$

3.

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(x)\sin^4(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(x)\sin^4(x)\cos(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2(x))^2\sin^4(x)\cos(x)\,dx$$

$$t=\sin(x)\Rightarrow dt=\cos(x)\,dx$$
$$x=0\Rightarrow t=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$$

$$K=\int_0^1(1-t^2)^2t^4dt=\int_0^1(1-2t^2+t^4)t^4dt=\int_0^1(t^4-2t^6+t^8)dt=\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}=\frac{7\times 9-2\times 5\times 9+5\times 7}{315}=\frac{63-90+35}{315}=\frac{8}{315}$$

4.

$$L=\int_2^3\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$$
$$\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[\frac{4x^2+x+4}{(x+2)^2}\right]_{x=1}=1$$

On multiplie par $(x+2)^2$, puis $x=-2$

$$c=\left[\frac{4x^2+x+4}{x-1}\right]_{x=-2}=-6$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$4=a+b\Rightarrow b=3$$

$$L=\int_2^3\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{(x+2)^2}dx=\left[\ln(x-1)+3\ln(x+2)+\frac{6}{x+2}\right]_2^3$$
$$=\ln(2)+3\ln(5)+\frac{6}{5}-\left(\ln(1)+3\ln(4)+\frac{6}{4}\right)=\ln(2)+\ln(125)-\ln(64)-\frac{3}{10}$$
$$=\ln\left(\frac{125}{32}\right)-\frac{3}{10}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Si $x>1$ alors $x^2>x$ et si $t\geq x>1$ alors $\ln(t)>0$ donc $f(x)>0$
2.

$$t \to \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}$$

Est continue et $x \to x^2$ est dérivable donc f est dérivable.

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2)}{(x^2-1)^2} \times 2x - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{4x\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}\left(4x-(x+1)^2\right) = \frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(4x-x^2-2x-1)$$
$$= -\frac{\ln(x)}{(x-1)^2(x+1)^2}(x^2-2x+1) = -\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$$

3.

a) La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t > 1$ dit qu'il existe $c \in]1, t[$ tel que

$$\ln(t) = \ln(1) + (t-1)\ln'(1) + \frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c) \Leftrightarrow \ln(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$1 < c < t \Leftrightarrow 1 < c^2 < t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} < \frac{1}{c^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2} < \frac{(t-1)^2}{2c^2} < \frac{(t-1)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < t-1-\frac{(t-1)^2}{2c^2}$$
$$< t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t-1-\frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t-1-\frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2} < t - 1$, on a bien

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

b) On divise par $(t-1)^2 > 0$

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} < \frac{\ln(t)}{(t-1)^2} < \frac{1}{t-1}$$

Comme $x < x^2$ on intègre

$$\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\right)dt \le f(x) \le \int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt \Leftrightarrow \left[\ln(t-1)-\frac{t}{2}\right]_x^{x^2} \le f(x) \le [\ln(t-1)]_x^{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ln(x^2-1) - \frac{x^2}{2} - \ln(x-1) + \frac{x}{2} \le f(x) \le \ln(x^2-1) - \ln(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \ln(x+1) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \le f(x) \le \ln(x+1)$$

On fait tendre x vers 1^+ et on trouve que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln(2)$$

Allez à : Exercice 3