Contrôle continu final automne 2010

Exercice 1.

1. Ecrire le développement limité à l'ordre 7, en 0 de $x^2\cos(x)-\sin^2(x)$
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 3, en 0, de $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}$ et en déduire sa limite en 0.

Exercice 2.

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer
$$I=\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx$$
2. A l'aide du changement de variable $t=e^x$ calculer
$$J=\int_1^2\frac{dx}{\operatorname{sh}(x)}$$
3. A l'aide du changement de variable $t=\sin(x)$ calculer
$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5(x)\sin^4(x)\,dx$$
On commencera par écrire
$$\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{(x+2)^2}$$
4. Calculer l'intégrale
$$L=\int_2^3\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$$

Exercice 3.

Soit $I=]1,+\infty[$. On désigne par f l'application de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x\in I$, par
$$f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\ln(t)}{(t-1)^2}dt$$
On ne cherchera pas à exprimer f à l'aide de fonctions usuelles

1. Déterminer le signe de $f(x)$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur I, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on exprimera $f'(x)$ de la manière la plus simple possible.
3.
   a) Montrer que pour tout $t\in I$,
   $$t-1-\frac{(t-1)^2}{2}<\ln(t)<t-1$$
   On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.
   b) En déduire l'existence et la valeur de
   $$\lim_{x\to 1^+}f(x)$$