Université Claude Bernard Lyon 1
Math II-Algèbre
Automne 2010

Contrôle continu final du 19 Janvier 2011
Durée 2 heures
Les documents, les calculettes et les téléphone portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -id_E$. On pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer $\det(A^2)$.
2. En déduire que n est un nombre pair.
   Dans la suite on suppose que $n = \dim(E) = 2$.
3. Soit $v \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v, f(v)\}$ est une base de E.
   Indication : soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = av + bf(v) = 0$. Calculer $f(x)$.
4. Donner la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
5. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.
Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme
$$X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
Par le polynôme $X^2 - 1$.
Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u(P) =$ le reste de la division euclidienne de XP par $X^4 - 1$.

1. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de E. Calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et en déduire la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver les polynômes unitaires P_0 et P_1 de degré 3 tels que $u(P_0) = P_0$ et $u(P_1) = -P_1$.
   (Rappel : un polynôme unitaire de degré 3 *est un polynôme de la forme* $X^3 + aX^2 + bX + c$*.)*
3. Montrer que le noyau $\ker(u^2 + id_E)$ est le sous-espace-vectoriel de E engendré par $Q_0 = X^2 - 1$ et $Q_1 = X^3 - X$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{P_0, P_1, Q_0, Q_1\}$ est une base de E.
5. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
6. Calculer Q^{-1} et la matrice B de u dans la base $\mathcal{C}$.

Allez à : Correction exercice 3

CORRECTION

Correction exercice 1.

1.
$$\det(A^2) = \det(-I_n) = (-1)^n$$

2.
$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = (-1)^n$$
Si $n = 2p + 1$ alors $(\det(A))^2 = (-1)^{2p+1} = -1$, c'est impossible, donc n est paire.

3. $f\big(av + bf(v)\big) = af(v) + bf^2(v) = af(v) - bv$
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} av + bf(v) = 0 \\ af(v) - bv = 0 \end{cases}$$
$\det(A) \neq 0$ donc le noyau de f est réduit au vecteur nul donc $v \neq 0 \Rightarrow f(v) \neq 0$
$bL_1 + aL_2$ donne $(b^2 + a^2)f(v) = 0 \Rightarrow b^2 + a^2 = 0$, $a = b = 0$.
Cela montre que $\big(v, f(v)\big)$ est libre, cette famille a deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base.

4. $f(v) = 0 \times v + 1 \times f(v)$ et $f\big(f(v)\big) = -v = -1 \times v + 0 \times f(v)$
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(v) & f\big(f(v)\big) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v \\ f(v) \end{array} \end{array}$$

5. Si $v = \alpha e_1 + \beta e_2$ et $f(v) = \gamma e_1 + \delta e_2$ alors $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$, le théorème de changement de base donne
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1}MP$$
D'où le résultat.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Première méthode : (ce n'est pas la meilleure, c'est même une très mauvaise idée)

$X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	$X^2 - 1$
$X^{10} \qquad - X^8$	$X^8 + X^7 + 2X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 4X + 5$
$X^9 + 2X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	
$X^9 \qquad - X^7$	
$2X^8 + 2X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	
$2X^8 \qquad - 2X^6$	
$2X^7 + 3X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	
$2X^7 \qquad - 2X^5$	
$3X^6 + 3X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	
$3X^6 \qquad - 3X^4$	
$3X^5 + 4X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$	
$3X^5 \qquad - 3X^3$	
$4X^4 + 4X^3 + X^2 + X + 1$	
$4X^4 \qquad - 4X^2$	
$4X^3 + 5X^2 + X + 1$	
$4X^3 \qquad - 4X$	

$$\begin{array}{r|}
5X^2+5X+1\\
5X^2\qquad -5\\
\hline
5X+6
\end{array}$$

Deuxième méthode : (la bonne)
Il existe $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$X^{10}+X^9+X^8+X^7+X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=(X^2-1)Q+R$$

Il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $R=aX+b$
On prend $X=1$

$$11=a+b$$

On prend $X=-1$

$$1=-a+b$$

En faisant la somme de ces équations, on trouve $12=2b$, donc $b=6$, puis en remplaçant dans l'une ou l'autre on trouve $a=5$.
Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$X\times 1=0\times(X^4-1)+X\Rightarrow u(1)=X$$
$$X\times X=0\times(X^4-1)+X^2\Rightarrow u(X)=X^2$$
$$X\times X^2=0\times(X^4-1)+X^3\Rightarrow u(X^2)=X^3$$
$$X\times X^3=1\times(X^4-1)+1\Rightarrow u(X^3)=1$$

Donc

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}P=X^3+aX^2+bX+c\Rightarrow u(P)&=u(X^3)+au(X^2)+bu(X)+cu(1)=1+aX^3+bX^2+cX\\&=aX^3+bX^2+cX+1\end{aligned}$$

Donc

$$u(P_0)=P_0\Leftrightarrow aX^3+bX^2+cX+1=X^3+aX^2+bX+c\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=a\\c=b\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$$

$$P_0=X^3+X^2+X+1$$

$$u(P_1)=P_1\Leftrightarrow aX^3+bX^2+cX+1=-(X^3+aX^2+bX+c)\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-a\\c=-b\\c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-1\end{cases}$$

$$P_1=X^3-X^2+X-1$$

3.

$$\begin{aligned}P=aX^3+bX^2+cX+d\Rightarrow u(P)&=au(X^3)+bu(X^2)+cu(X)+du(1)=a+bX^3+cX^2+dX\\&=bX^3+cX^2+dX+a\\\Rightarrow u^2(P)=u\big(u(P)\big)&=u(bX^3+cX^2+dX+a)=bu(X^3)+cu(X^2)+du(X)+au(1)\\&=b+cX^3+dX^2+aX=cX^3+dX^2+aX+b\end{aligned}$$

$$P \in \ker(u^2 + id_E) \Leftrightarrow u^2(P) + P = 0 \Leftrightarrow cX^3 + dX^2 + aX + b + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)X^3 + (b+d)X^2 + (a+c)X + b + d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases}$$

$$P = aX^3 + bX^2 - aX - b = a(X^3 - X) + b(X^2 - 1) = aQ_1 + bQ_0$$

Donc (Q_0, Q_1) engendre $\ker(u^2 + id_E)$.

4. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la quatrième colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\big((-1) \times 1 - (-1) \times (-1)\big) = -4$$

En additionnant les deux première lignes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\big(-1 \times 1 - (-1) \times (-1)\big) = 4$$

En additionnant les deux premières colonnes.

$$\det(Q) = 8 \neq 0$$

Donc $\mathcal{C}$ est une base.

5.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$QY = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = x_1 \\ y_1 + y_2 - y_4 = x_2 \\ y_1 - y_2 + y_3 = x_3 \\ y_1 + y_2 + y_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = x_1 \\ 2y_2 + y_3 - y_4 = -x_1 + x_2 \\ 2y_3 = -x_1 + x_3 \\ 2y_4 = -x_2 + x_4 \end{cases}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

A partir de la deuxième ligne

$$2y_2 = -y_3 + y_4 - x_1 + x_2 \Leftrightarrow y_2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right) - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$\Leftrightarrow y_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

A partir de la première ligne

$$y_1 = y_2 + y_3 + x_1 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_1 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u(P_0) = P_0, u(P_1) = -P_1$$

$$u(Q_0) = u(X^2 - 1) = u(X^2) - u(1) = X^3 - X = Q_1$$

On peut faire pareil pour $u(Q_1)$ ou ruser en utilisant $u^2(Q_0) = -Q_0$, car $u^2(Q_0) = u(Q_1)$ donc $u(Q_1) = -Q_0$, donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : on aurait pu utiliser l'exercice 1 à la restriction de u au sous-espace stable $\ker(u^2 + id_E)$ pour en déduire que la matrice B écrite par blocs s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & O \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Avec

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais je pense que cela dépasse le niveau moyen d'un étudiant de L1.

Allez à : Exercice 3