Université Claude Bernard Lyon 1
Math II-Algèbre
Automne 2010

Contrôle continu final du 19 Janvier 2011
Durée 2 heures
Les documents, les calculettes et les téléphone portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 = -id_E$. On pose $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer $\det(A^2)$.
2. En déduire que n est un nombre pair.
   Dans la suite on suppose que $n = \dim(E) = 2$.
3. Soit $v \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v, f(v)\}$ est une base de E.
   Indication : soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = av + bf(v) = 0$. Calculer $f(x)$.
4. Donner la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
5. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_2$, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme
$$X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
Par le polynôme $X^2 - 1$.

Exercice 3.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u(P) =$ le reste de la division euclidienne de XP par $X^4 - 1$.

1. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de E. Calculer $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$ et $u(X^3)$ et en déduire la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Trouver les polynômes unitaires P_0 et P_1 de degré 3 tels que $u(P_0) = P_0$ et $u(P_1) = -P_1$.
   (Rappel : un polynôme unitaire de degré 3 *est un polynôme de la forme* $X^3 + aX^2 + bX + c$.*)*
3. Montrer que le noyau $\ker(u^2 + id_E)$ est le sous-espace-vectoriel de E engendré par $Q_0 = X^2 - 1$ et $Q_1 = X^3 - X$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{P_0, P_1, Q_0, Q_1\}$ est une base de E.
5. Donner la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
6. Calculer Q^{-1} et la matrice B de u dans la base $\mathcal{C}$.