Université Lyon 1
Licence Sciences et Technologies
Année 2010-2011
Unité d'enseignement: Math I Algèbre
Contrôle final du 20 janvier 2011
Durée: 2 heures
Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Cet énoncé comporte deux pages.

Question 1.
On désigne le plan complexe par $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que pour tout $z \in E$ on a $\frac{z-i}{z+i} \neq 1$.
Soit $f: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

(2) Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $\omega = f(z)$.
(3) Montrer que l'application f est injective.
Que peut-on en conclure sur l'application f ?
(4) Résoudre l'équation $(z-i)^3 + 8(z+i)^3 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Question 2.
(1) a. Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.
b. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u + 11v = 1$.
c. En déduire le reste de la division de N par 77.
(2) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. Il en a plus de 10. S'il les répartit dans les cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto ?

Question 3.
Répondre par vrai ou faux aux assertions qui suivent, en justifiant votre réponse par une preuve courte ou un contre-exemple.
(1) Il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) tels que

$$231u + 110v = 23$$

(2) Soit un entier naturel $n \geq 2$. Tout facteur premier p de $n! + 1$ satisfait $p > n$.
(3) Soit n un entier naturel non nul. Il n'existe pas de triplet (x, y, z) d'entier impair tels que $x^n + y^n = z^n$.
(4) Soit n un entier naturel non nul. Il y a $\binom{n+2}{2}$ couples d'entiers naturels (x, y) pour lesquels

$$x + y \leq n$$

Question 4.
(1) Soit $A = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Démontrer que $A = e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{3i\pi}{5}}$.
(2) Soit $B = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Démontrer que $B = e^{\frac{i\pi}{5}} - e^{\frac{4i\pi}{5}}$.
(3) On pose $\zeta = e^{\frac{i\pi}{5}}$.
a. Calculer ζ^5
b. Exprimer A et B en fonction de ζ.
c. En déduire que $1 + A - B = 0$.
(Indication : il peut être utile de reconnaître une somme des termes d'une suite géométrique.)

Remarque : A est la longueur du côté d’un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ; B est celle du côté d’un décagone étoilé. Cet exercice montre que la différence entre le périmètre d’un décagone étoilé et d’un décagone convexe est un entier.