Math II Algèbre

Epreuve finale de contrôle continu, 21 Janvier 2010

Durée 2heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.
Toute réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction dans la correction.

Exercice 1.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers F.

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1°) Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

2°) Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.

3°) Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.

4°) Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5°) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6°) Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1°) Montrer que u est linéaire.

2°) Déterminer une base de $\ker(u)$et une base de $Im(u)$.

3°) A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1°) Calculer $\Delta = \det(A)$

2°) Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.
Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension finie et pair.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes
(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim\big(Im(u)\big)$
(b) $Im(u) = \ker(u)$
Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.
Soient $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X - X^2$ et $P_2 = 1 - X - X^2$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ?
Allez à : Correction exercice 6

Correction exercice 1.
Si u est injective alors si $x \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_F \Leftrightarrow u(x) = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car u est injective, ce qui montre que $Ker(u) = \{0_E\}$.
Si $Ker(u) = \{0_E\}$ alors $u(x) = u(y) \Leftrightarrow u(x) - u(y) = 0_F \Leftrightarrow u(x - y) = 0_F \Rightarrow x - y = 0_E$ car $Ker(u) = \{0_E\}$, et donc $x = y$ ce qui montre que u est injective.
Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.
1°) $A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2°) $u(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E$
Soient $x \in E$ et $y \in E$ et λ et μ deux réels, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y) = \lambda x + \mu y$, donc $\lambda x + \mu y \in E$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Une base de E est le vecteur $a = (1,0,1)$ et bien sur $\dim(E) = 1$.
3°) Il est clair que le vecteur nul est dans F.
Soient $x \in F$ et $y \in F$ et λ et μ deux réels
$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$,

$$-2(\lambda x_1 + \mu y_1) + 2(\lambda x_2 + \mu y_2) + 3(\lambda x_3 + \mu y_3) = \lambda(-2x_1 + 2x_2 + 3x_3) + \mu(-2y_1 + 2y_2 + 3y_3) = 0$$

Donc $\lambda x + \mu y \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1,1,0) + \frac{x_3}{2}(3,0,2)$$

On pose $b = (1,1,0)$ et $c = (3,0,2)$
(b, c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.
Une base de F est (b, c).
4°) $u(b)$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d\acute{e}t(a,b,u(b))=\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&1&1\\1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$$

Donc $\big(a,b,u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5°) $\dim(E)+\dim(F)=1+2=3=\dim(\mathbb{R}^3)$

$(1,0,1)\notin F$ car $-2\times 1+2\times 0+3\times 1=1\neq 0$ donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

6°) $u\big(u(b)\big)$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-1&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $u\big(u(b)\big)=-b$

$$Mat_{\beta'}(u)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}u(a)&u(b)&u(u(b))\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}a\\b\\u(b)\end{array}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1°) Soient $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soient λ et μ deux réels.

$$\lambda x+\mu y=(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,\lambda x_3+\mu y_3)$$

$$\begin{aligned}u(\lambda x+\mu y)&=\big(-2(\lambda x_1+\mu y_1)+4(\lambda x_2+\mu y_2)+4(\lambda x_3+\mu y_3),-(\lambda x_1+\mu y_1)+\lambda x_3\\&+\mu y_3,-2(\lambda x_1+\mu y_1)+4(\lambda x_2+\mu y_2)+4(\lambda x_3+\mu y_3)\big)\\&=(\lambda[-2x_1+4x_2+4x_3]+\mu[-2y_1+4y_2+y_3],\lambda[-x_1+x_3]\\&+\mu[-y_1+y_3],\lambda[-2x_1+4x_2+4x_3]+\mu[-2y_1+4y_2+y_3])\\&=\lambda(-2x_1+4x_2+4x_3,-x_1+x_3,-2x_1+4x_2+4x_3)\\&+\mu(-2y_1+4y_2+4y_3,-y_1+y_3,-2y_1+4y_2+4y_3)=\lambda u(x)+\mu u(y)\end{aligned}$$

Donc u est linéaire.

2°) Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique.

$$x\in\ker(u)\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-2&4&4\\-1&0&1\\-2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-2x_1+4x_2+4x_3=0\\-x_1+x_3=0\\-2x_1+4x_2+4x_3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-x_1+2x_2+2x_3=0\\x_1=x_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2x_2+x_3=0\\x_1=x_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x_2=-\frac{1}{2}x_3\\x_1=x_3\end{array}\right.$$

$$x=\left(x_3,-\frac{1}{2}x_3,x_3\right)=\frac{x_3}{2}(2,-1,2)$$

$a=(2,-1,2)$ est un vecteur non nul qui engendre $Ker(u)$, c'est une base de $Ker(u)$.

$$Im(u)=Vect(u(e_1),u\big(e_2\text{à},u(e_3)\big)$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)\Leftrightarrow 1+\dim\big(Im(u)\big)=3\Leftrightarrow\dim\big(Im(u)\big)=2$$

$u(e_1)=-2e_1-e_2-2e_3$ et $u(e_2)=4e_1+4e_3$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de $Im(u)$ qui est de dimension 2, $\big(u(e_1),u(e_2)\big)$ est une base de $Im(u)$.

3°) $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3\Leftrightarrow\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\det\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)=\begin{vmatrix}2&-2&4\\-1&-1&0\\2&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&4\\-2&-1&0\\0&-2&4\end{vmatrix}$$

En additionnant les deux premières colonnes sur la première colonne.

$$\det\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)=\begin{vmatrix}0&-2&4\\-2&-1&0\\0&-2&4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2&4\\-2&4\end{vmatrix}=0$$

Donc on n'a pas $\ker(u)\oplus Im(u)=\mathbb{R}^3\Leftrightarrow\big(a,u(e_1),u(e_2)\big)$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1°)

$$\begin{array}{c}C_1\quad C_2\quad C_3\quad C_4\\ \begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}C_1\quad C_2-C_1\quad C_3-C_1\quad C_4-C_1\\ \begin{vmatrix}a&0&0&0\\a&b-a&b-a&b-a\\a&b-a&c-a&c-a\\a&b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}\end{array}=a\begin{vmatrix}b-a&b-a&b-a\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}$$

$$=a(b-a)\begin{array}{c}C_1\quad C_2\quad C_3\\ \begin{vmatrix}1&1&1\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix}\end{array}=a(b-a)\begin{array}{c}C_1\quad C_2-C_2\quad C_3-C_1\\ \begin{vmatrix}1&0&0\\b-a&c-b&c-b\\b-a&c-b&d-b\end{vmatrix}\end{array}$$

$$=a(b-a)\begin{vmatrix}c-b&c-b\\c-b&d-b\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix}1&1\\c-b&d-b\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c)$$

2°) $\Delta=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ \quad ou\\ a=b\\ \quad ou\\ b=c\\ \quad ou\\ c=d\end{cases}$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

Si (a) alors

Si $y\in Im(u)$ alors il existe $x\in E$ $y=u(x)$ alors $u(y)=u^2(x)=0_E$ alors $y\in Ker(u)$

Donc $Im(u)\subset\ker(u)$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=dimE\Leftrightarrow\dim(\ker(u))+\frac{n}{2}=n\Leftrightarrow\dim(\ker(u))=\frac{n}{2}$$

$Im(u)\subset\ker(u)$ et ces deux espaces ont la même dimension, donc ils sont égaux.

(b) D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=dimE\Leftrightarrow 2\dim\big(Im(u)\big)=n\Leftrightarrow 2\mathrm{rg(u)}=\mathrm{n}$$

Pour tout $x\in E$, $u(x)\in Im(u)$ donc $u(x)\in\ker(u)$ donc $u\big(u(x)\big)=0_E$ donc $u^2=O_E$.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2=0\Leftrightarrow\alpha+\beta(1+X-X^2)+\gamma(1-X-X^2)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma+(\beta-\gamma)X-(\beta+\gamma)X^2$$

$$=0\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\\ 2\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Donc cette famille est libre.

Allez à : Exercice 6