Math II Algèbre

Epreuve finale de contrôle continu, 21 Janvier 2010

Durée 2heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits. Toute réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction dans la correction.

Exercice 1.

Question de cours

Soit u une application linéaire de E vers F.

Montrer que : u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$.

Exercice 2.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1°) Déterminer la matrice de u dans la base canonique.

2°) Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.

3°) Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.

4°) Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5°) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

6°) Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Exercice 3.

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 4x_2 + 4x_3, -x_1 + x_3, -2x_1 + 4x_2 + 4x_3)$$

1°) Montrer que u est linéaire.

2°) Déterminer une base de $\ker(u)$et une base de $Im(u)$.

3°) A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

1°) Calculer $\Delta = \det(A)$

2°) Déterminer les valeurs de a, b, c et d qui annule Δ.

Exercice 5.

Soit u une application linéaire de E dans E, E étant un espace vectoriel de dimension finie et pair.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(a) $u^2 = O_E$ (où O_E est l'application linéaire nulle) et $n = 2\dim\big(Im(u)\big)$

(b) $Im(u) = \ker(u)$

Exercice 6.

Soient $P_0 = 1$, $P_1 = 1 + X - X^2$ et $P_2 = 1 - X - X^2$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est-elle libre ?