Math I Analyse

Epreuve final de contrôle continue, 19 janvier 2010

Durée 2 heures.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est inutile de recopier les énoncés. Toutes réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la correction.

Question de cours (6 points)

1. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires
3. Enoncer le théorème des accroissements finis

Correction de la question de cours

1. De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in I$, avec $f(a) \neq f(b)$, pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire dans $[f(a), f(b)]$ si $f(a) < f(b)$ ou dans $[f(b), f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.
3. Soit une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

Exercice (10 points) On considère les fonctions (polynômiales).

$$\begin{aligned} g_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_0(x) = 1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On définit aussi les fonctions f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = e^x - g_n(x)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (où e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle).

1.
   (a) Montrer que la fonction
   $$\begin{aligned} \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_0(x)}{x} \end{aligned}$$
   a une limite en zéro que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f_1 est dérivable et que $f_1' = f_0$.

   (c) Déduire de ce qui précède et de la règle de l'Hospital (rappelée plus bas), que
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable et que $f_n' = f_{n-1}$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \in [1, n]$, f_n est p fois dérivable et que sa dérivée p-ième est $f_n^{(p)} = f_{n-p}$.

   (c) Déduire de ce qui précède, en appliquant n fois la règle de l'Hospital, que
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Règle de l'Hospital : si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que $u(a) = v(a) = 0$ et v' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, si la fonction $\frac{u'}{v'}$ a une limite finie l en a, alors la fonction $\frac{u}{v}$ a aussi pour limite l au point a.

Correction

1. (a) Pour tout $x \neq 0$

$$\frac{f_0(x)}{x} = \frac{e^x - g_0(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} = \frac{x\big(1 + o(1)\big)}{x} = 1 + o(1)$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \big(1 + o(1)\big) = 1$$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x - g_1(x) = e^x - (1 + x)$

f_1 est la somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^x - 1 = e^x - g_0(x) = f_0(x)$$

Donc $f_1' = f_0$

(c) $f_1(x)$ et x^2 tendent tous les deux vers 0 lorsque x tend vers 0.

$$f_1'(x) = f_0(x) = e^x - 1 \quad et \quad (x^2)' = 2x$$
$$\frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x} \to \frac{1}{2} \times 1$$

Lorsque $x \to 0$ d'après la question 1. (a).

D'après la règle de L'Hospital :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. (a) $f_n(x) = e^x - g_n(x)$, f_n est la somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^x - \left(1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{kx^{k-1}}{k!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right) \\ &= e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Donc $f_n' = f_{n-1}$.

(b) f_n est de classe C^∞ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons par récurrence que $f_n^{(p)} = f_{n-p}$, pour $p = 1$ c'est l'objet de la question 2. (a). Montrons que pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$ la propriété au rang p entraine celle au rang $p + 1$.

$$\left(f_n^{(p)}\right)' = \left(f_{n-p}\right)' = f_{(n-p)-1} \ (1)$$

D'après la question 2. (a) en l'appliquant à $n - p$ au lieu de n.

$$(1) \Leftrightarrow f_n^{(p+1)} = f_{n-(p+1)}$$

Donc pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $f_n^{(p)} = f_{n-p}$, la dérivabilité étant évidente.

(c) Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 0$, c'est l'objet de la question 1. (a) (et pour $n = 2$ c'est l'objet de la question 1. (c)). Montrons que pour tout $n \geq 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_{n-1}(x)}{x^n} = \frac{1}{n!} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$f_n(x) = e^x - g_n(x) \to 0$ et $x^{n+1} \to 0$ lorsque $x \to 0$, il s'agit d'une forme indéterminée.

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) \quad et \quad (x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

Et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f_{n-1}(x)}{x^n} = \frac{1}{n}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Conclusion, pour tout $n \geq 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice (6 points). On considère la fonction

$$f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$$

1. Montrer que f est dérivable et solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
2. Montrer que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en 0.
3. Etudier la continuité de la fonction

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ l & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

4. Etudier la dérivabilité de g, dresser son tableau de variation et tracer son graphe.

Correction exercice

1. Pour tout $t > 0$, f est la composée de fonction dérivable donc f est dérivable.

$$f'(t) = \left(-\frac{1}{t^2}\right)' e^{-\frac{1}{t^2}} = -(t^{-2})' e^{-\frac{1}{t^2}} = -(-2)t^{-3} e^{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} = \frac{2}{t^3} f(t)$$

Donc f est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' - \frac{2}{t^3} y = 0$$

2.

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} -\frac{1}{t^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0 = l$$

3. Pour $x \neq 0$, la fonction est continue, il reste à regarder la continuité en 0.

$$f(|x|) = e^{-\frac{1}{(|x|)^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = l = g(0)$$

Donc g est continue en 0.

4. Si $x \neq 0$, g est dérivable. En 0 :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit d'une forme indéterminée. On pourrait appliquer la règle de l'Hospital mais ici ce n'est pas une bonne idée, nous allons faire le changement de variable $X = \frac{1}{x}$:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=Xe^{-X^2}$$

Lorsque $x\to 0^{\pm}$, $X\to\pm\infty$ et $X^2\to+\infty$. La limite de Xe^{-X^2} est toujours indéterminée mais l'exponentielle l'emporte sur la puissance donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{X\to\infty}Xe^{-X^2}=0$$

Ce qui montre que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=0$.

Remarque :

Ce n'est pas exactement le résultat du cours qui est

$$\lim_{u\to+\infty}u^{\alpha}e^{-u}=0$$

Mais pour l'appliquer il faudrait faire deux cas, $x<0$ et $X\to-\infty$ et $x>0$ et $X\to+\infty$ en faisant des changements de variables différents à chaque fois ($u=\sqrt{-X}$ en $-\infty$ et $u=\sqrt{X}$ en $+\infty$).

La fonction est paire, il suffit de faire une étude pour $x\geq 0$

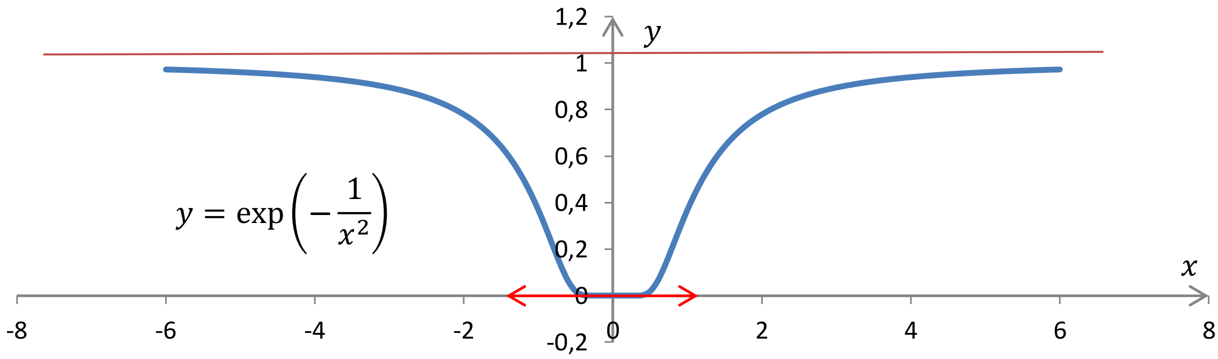
$$\forall x>0, g'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}>0$$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et $g'(0)=0$, la courbe admet une tangente horizontale en $x=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x^2}}=e^0=1$$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$.

On en déduit l'allure de la courbe



Attention : La courbe à l'air d'avoir un « plat » autour de $x=0$, c'est faux, mais les valeurs de $g(x)$ au voisinage de $x=0$ sont si petites que $g(x)$ à l'air d'être nul.

Problème (18 points)

1. Soit une fonction $f:[a,b]\to[a,b]$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. On suppose qu'il existe un réel $k\in]0,1[$ tel que, quels que soient $x,y\in[a,b]$,

$$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$$

(a) Montrer que f est continue.

(b) Etant donné $x_0\in[a,b]$, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

i. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|x_{n+1}-x_n|\leq k|x_n-x_{n-1}|$.

ii. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_{n+1}-x_n|\leq k^n|x_1-x_0|$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire) que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$,

$$|x_{n+m}-x_n|\leq\frac{k^n}{1-k}|x_1-x_0|$$

iii. Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(c) Montrer que la limite l de la suite obtenue à la question précédente vérifie $f(l) = l$, et qu'il n'y a pas d'autre élément de $[a, b]$ tel que $f(x) = x$.

2. Dans cette question, f est une fonction de classe C^1 (C'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(l) = l$ et $|f'(l)| < 1$. On note $\delta = 1 - |f'(l)|$.

(a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [l - \eta, l + \eta]$, $|f'(x)| \leq 1 - \frac{\delta}{2}$.

(b) On note $k = 1 - \frac{\delta}{2}$. Montrer en utilisant le théorème des accroissement finis que, quels que soient $x, y \in [l - \eta, l + \eta]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

(c) Montrer que $f([l - \eta, l + \eta]) \subset [l - \eta, l + \eta]$.

(d) En appliquant le résultat de la question 1), montrer que, quel que soit $x_0 \in [l - \eta, l + \eta]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l.

(e) On suppose dans cette question que $f'(l) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta' \in]0, \eta]$ tel que pour tout $x \in [l - \eta', l + \eta']$, $f'(x) > 0$. Montrer, en utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis que quel que soit $x_0 \in [l - \eta', l + \eta']$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est monotone (croissante si $x_0 < l$ et décroissante si $x_0 > l$).

Correction du problème

1.

(a) Soit $x_0 \in [a, b]$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \frac{\epsilon}{k} > 0, \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| < k \times \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Cela montre que f est continue en x_0, et ceci pour tout $x_0 \in [a, b]$, donc f est continue sur $[a, b]$.

(b) i. Pour tout $n \geq 1$

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

ii. Montrons par récurrence sur p que pour tout $p \in \{0, \dots, n - 1\}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{p+1}|x_{n-p} - x_{n-p-1}|$$

Pour $p = 0$ c'est l'objet de la question 1. (a) i.

Montrons que pour tout $p \geq 0$: $|x_{n+1} - x_n| \leq k^p|x_{n-p+1} - x_{n-p}|$ entraine que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{p+1}|x_{n-p} - x_{n-p-1}|$$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^p|x_{n-p+1} - x_{n-p}| \leq k^p \times k|x_{n-p} - x_{n-p-1}| = k^{p+1}|x_{n-p} - x_{n-p-1}|$$

En appliquant la question 1. (a) i. à $n - p$ au lieu de n.

Donc pour tout $p \geq 0$ on a :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^p|x_{n-p+1} - x_{n-p}|$$

En particulier pour tout $p = n$, on a :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$$

$$\begin{aligned}
|x_{m+n} - x_n| &= \left|\sum_{k=0}^{m-1}(x_{m+n-k} - x_{m+n-k-1})\right| \\
&= |(x_{m+n} - x_{m+n-1}) + (x_{m+n-1} - x_{m+n-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1}|x_{m+n-k} - x_{m+n-k-1}| \\
&= |x_{m+n} - x_{m+n-1}| + |x_{m+n-1} - x_{m+n-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} k^{m+n-k-1}|x_1 - x_0| \\
&= k^{m+n-1}|x_1 - x_0| + +k^{m+n-2}|x_1 - x_0| + \cdots + k^n|x_1 - x_0| \\
&= k^n|x_1 - x_0|\sum_{k=0}^{m-1} k^{m-k-1} = k^n|x_1 - x_0|(k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + 1) \\
&= k^n|x_1 - x_0|\frac{1 - k^m}{1 - k} < k^n|x_1 - x_0|\frac{1}{1 - k} = \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Car $0 < k < 1$.

Il n'est pas nécessaire d'utiliser, à la fois, la notation $\sum$ et la notation « petits points ».

iii. Comme $0 < k < 1$, $k^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| = 0$$

On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} |x_{m+n} - x_n| = 0$$

Cela suffit à montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

On rappelle tout de même la définition d'une suite de Cauchy

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n > N, |x_{m+n} - x_n| < \epsilon$$

Histoire de faire un peu de « blabla », une fois que l'on a fixé un N tel que $\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$ soit inférieur à ϵ indépendamment de m (ce qui est possible car cette expression est indépendante de m et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$), on peut majorer $|x_{m+n} - x_n|$ par ϵ. En résumé si on arrive à majorer $|x_{m+n} - x_n|$ par un truc indépendant de m et qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ c'est bon, la suite est de Cauchy.

(c) En faisant tendre n vers l'infini dans l'expression

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

Comme la suite converge

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

Comme la fonction f est continue

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(l)$$

Et donc

$$l = f(l)$$

Il reste à montrer qu'il n'y a qu'un seul réel dans $[a, b]$ qui vérifie $f(l) = l$, on suppose qu'il en existe 2, l_1 et l_2, on a donc $f(l_1) = l_1$, $f(l_2) = l_2$ et $l_1 \neq l_2$

$$|l_2 - l_1| = |f(l_2) - f(l_1)| \leq k|l_2 - l_1|$$

Puis comme $|l_2 - l_1| \neq 0$, cela donne

$$1 \leq k$$

Ce qui est faux puisque $k \in]0,1[$

Conclusion il n'existe qu'un réel dans $[a, b]$ tel que $f(l) = l$, on l'appelle point fixe de f. On vient de démontrer le théorème du point fixe.

2. (a) f' est continue donc continue en l

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - l| \leq \eta \Rightarrow |f'(x) - f'(l)| \leq \epsilon$$

On choisit $\epsilon = \frac{\delta}{2}$, et on rappelle que

$$|x - l| \leq \eta \Leftrightarrow -\eta \leq x - l \leq \eta \Leftrightarrow l - \eta \leq x \leq l + \eta \Leftrightarrow x \in [l - \eta, l + \eta]$$

Et que

$$\delta = 1 - |f'(l)| \Leftrightarrow |f'(l)| = 1 - \delta$$

Alors

$$\forall x \in [l - \eta, l + \eta], |f'(x)| = |f'(x) - f'(l) + f'(l)| \leq |f'(x) - f'(l)| + |f'(l)| \leq \frac{\delta}{2} + 1 - \delta$$
$$= 1 - \frac{\delta}{2}$$

Remarque :

On a choisit $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ justement pour tomber sur le bon résultat à la fin.

Et d'autre part $\delta > 0$ car $|f'(l)| < 1$

(b) f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [l - \eta, l + \eta]$, il existe $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$ tels que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

Il est clair que $c \in [l - \eta, l + \eta]$ donc $|f'(c)| \leq k$ donc

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq k|x - y|$$

(c) Il faut montrer que si $x \in [l - \eta, l + \eta]$ alors $f(x) \in [l - \eta, l + \eta]$, autrement dit il faut montrer que si $|x - l| \leq \eta$ alors $|f(x) - l| \leq \eta$, d'après 2. (c) alors

$$|f(x) - f(l)| \leq k|x - l|$$

Comme $f(l) = l$, l'inégalité ci-dessus équivaut à

$$|f(x) - l| \leq k|x - l| \leq k\eta \leq \eta$$

Car $k = 1 - \frac{\delta}{2} < 1$.

(d) C'était évident au 2. (a) mais rappelons le, $k = 1 - \frac{\delta}{2} > 0$ donc $0 < k < 1$, comme

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Et f est continue car de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Tout cela pour dire que f vérifie les hypothèses du 1. Sur $[l - \eta, l + \eta]$, on peut donc en conclure (1. (c)) que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique valeur de $[l - \eta, l + \eta]$ qui vérifie $f(x) = x$, comme $f(l) = l$, c'est la seule valeur de $[l - \eta, l + \eta]$ (1. (c)) qui a cette propriété.

(e) f' est continue donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall x \in [l - \eta, l + \eta], |x - l| \leq \eta' \Rightarrow |f'(x) - f'(l)| < \epsilon$$

Comme $|x - l| \leq \eta'$ équivaut à $x \in [l - \eta', l + \eta']$ et que $x \in [l - \eta, l + \eta]$, il faut prendre $\eta' \leq \eta$, ce qui signifie bien que $0 < \eta' \leq \eta$

$$|f'(x) - f'(l)| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq f'(x) - f'(l) \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon + f'(l) \leq f'(x) \leq \epsilon + f'(l)$$

Il suffit de prendre $\epsilon = \frac{f'(l)}{2}$ pour montrer que

$$\forall x \in [l - \eta', l + \eta'], \qquad f'(x) \geq -\epsilon + f'(l) \geq -\frac{f'(l)}{2} + f'(l) = \frac{f'(l)}{2} > 0$$

f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis.

Dans l'intervalle $[l-\eta', l+\eta']$, $f'(x) > 0$, et d'après 2. (a) $|f'(x)| \leq k < 1$ on a :

$$0 < f'(x) \leq k < 1$$

On pose $\forall x \in [l-\eta', l+\eta']$, $g(x) = f(x) - x$, cette fonction est dérivable

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

Donc g est décroissante sur l'intervalle $[l-\eta', l+\eta']$

Supposons que $x_0 < l$ et montrons par récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$x_0 < l \Rightarrow g(x_0) > g(l)$$

Or $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = x_1 - x_0$ et $g(l) = f(l) - l = l - l = 0$

On en déduit que $x_1 > x_0$

Montrons que $x_n > x_{n-1}$ entraine que $x_{n+1} > x_n$

Appliquons le entre x_{n+1} et x_n le théorème des accroissements finis, il existe c dans l'intervalle $]x_n, x_{n+1}[$ ou $]x_{n+1}, x_n[$.

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = f'(c)(x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} = f'(c)(x_{n+1} - x_n)$$

Comme $f'(c) > 0$, $x_{n+1} - x_n$ a le même signe que $x_n - x_{n-1}$, or $x_n - x_{n-1} > 0$ donc $x_{n+1} - x_n > 0$, cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Supposons que $x_0 > l$ et montrons par récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$x_0 > l \Rightarrow g(x_0) < g(l)$$

Or $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = x_1 - x_0$ et $g(l) = f(l) - l = l - l = 0$

On en déduit que $x_1 < x_0$

Montrons que $x_n < x_{n-1}$ entraine que $x_{n+1} < x_n$

Appliquons le entre x_{n+1} et x_n le théorème des accroissements finis, il existe c dans l'intervalle $]x_n, x_{n+1}[$ ou $]x_{n+1}, x_n[$.

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = f'(c)(x_{n+1} - x_n) \Leftrightarrow x_n - x_{n-1} = f'(c)(x_{n+1} - x_n)$$

Comme $f'(c) > 0$, $x_{n+1} - x_n$ a le même signe que $x_n - x_{n-1}$, or $x_n - x_{n-1} < 0$ donc $x_{n+1} - x_n < 0$, cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.