Math I Analyse

Epreuve final de contrôle continue, 19 janvier 2010

Durée 2 heures.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est inutile de recopier les énoncés. Toutes réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la correction.

Question de cours (6 points)

1. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires
3. Enoncer le théorème des accroissements finis

Exercice (10 points) On considère les fonctions (polynômiales).

$$\begin{aligned} g_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_0(x) = 1 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g_n &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On définit aussi les fonctions f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = e^x - g_n(x)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (où e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle).

1.
   (a) Montrer que la fonction
   $$\begin{aligned} \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f_0(x)}{x} \end{aligned}$$
   a une limite en zéro que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f_1 est dérivable et que $f_1' = f_0$.

   (c) Déduire de ce qui précède et de la règle de l'Hospital (rappelée plus bas), que
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable et que $f_n' = f_{n-1}$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \in [1, n]$, f_n est p fois dérivable et que sa dérivée p-ième est $f_n^{(p)} = f_{n-p}$.

   (c) Déduire de ce qui précède, en appliquant n fois la règle de l'Hospital, que
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Règle de l'Hospital : si u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$, telles que $u(a) = v(a) = 0$ et v' ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, si la fonction $\frac{u'}{v'}$ a une limite finie l en a, alors la fonction $\frac{u}{v}$ a aussi pour limite l au point a.

Exercice (6 points). On considère la fonction

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est dérivable et solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

2. Montrer que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en 0.
3. Etudier la continuité de la fonction

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ l & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

4. Etudier la dérivabilité de g, dresser son tableau de variation et tracer son graphe.

Problème (18 points)

1. Soit une fonction $f : [a, b] \to [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On suppose qu'il existe un réel $k \in]0,1[$ tel que, quels que soient $x, y \in [a, b]$,
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$
   (a) Montrer que f est continue.
   (b) Etant donné $x_0 \in [a, b]$, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence
$$x_{n+1} = f(x_n)$$
      i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$.
      ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n|x_1 - x_0|$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire) que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,
$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$
      iii. Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Montrer que la limite l de la suite obtenue à la question précédente vérifie $f(l) = l$, et qu'il n'y a pas d'autre élément de $[a, b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Dans cette question, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (C'est-à-dire dérivable et de dérivée continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(l) = l$ et $|f'(l)| < 1$. On note $\delta = 1 - |f'(l)|$.
   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [l - \eta, l + \eta]$, $|f'(x)| \leq 1 - \frac{\delta}{2}$.
   (b) On note $k = 1 - \frac{\delta}{2}$. Montrer en utilisant le théorème des accroissement finis que, quels que soient $x, y \in [l - \eta, l + \eta]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
   (c) Montrer que $f([l - \eta, l + \eta]) \subset [l - \eta, l + \eta]$.
   (d) En appliquant le résultat de la question 1), montrer que, quel que soit $x_0 \in [l - \eta, l + \eta]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l.
   (e) On suppose dans cette question que $f'(l) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta' \in]0, \eta]$ tel que pour tout $x \in [l - \eta', l + \eta']$, $f'(x) > 0$. Montrer, en utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis que quel que soit $x_0 \in [l - \eta', l + \eta']$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la formule de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est monotone (croissante si $x_0 < l$ et décroissante si $x_0 > l$).