Université Claude Bernard Lyon 1
Licence Sciences et Technologie

Unité d' enseignement: Math I Algèbre
Contrôle continu final
janvier 2010 - durée 2 heures

- Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
- Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.

Question : 1.

(1) Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $11u + 13v = 1$.

(2) Déterminer les restes des divisions euclidienne de 3^{4444} par 11 et 13.

(3) En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{4444} par 143.

Question : 2.

Répondre par vrai ou faux aux énoncés qui suivent en justifiant votre réponse par un bref argument.

(1) 22^{22} admet 23 diviseurs.

(2) Il y a 16 relations binaires sur l'ensemble $E = \{1,2\}$.

(3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$.

(4) Dans $\mathbb{Z}$ on a $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$. (Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z} = \{nl, l \in \mathbb{Z}\}$).

Question : 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$z^6 - 2\cos(\alpha)\, z^3 + 1 = 0$$

Question : 4.

Pour la suite, on désigne par $\mathcal{U}_n$ le groupe (pour la multiplication) des racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

(1) Faire la liste des sous-groupes de $\mathcal{U}_{17}$.

(2) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathcal{U}_n$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\omega^m = 1 \Leftrightarrow n \text{ divise } m$$

(Indication : pour l'implication $\Rightarrow$ utiliser la division euclidienne)

(3) Déduire du point (2) que si $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est premier avec n alors l'élément ω^l est d'ordre n dans $\mathcal{U}_n$.

(4) Faire la liste des éléments du sous-groupe $< \omega^{12} >$ de $\mathcal{U}_{15}$ engendré par ω^{12}.

Question : 5.

(1) Montrer que l'application

$$f: \mathcal{U}_8 \to \mathcal{U}_2$$
$$z \mapsto z^4$$

Est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupe.

(2) Déterminer le noyau $\ker(f)$ du morphisme f et dresser sa table de multiplication.

(3) Expliciter un isomorphisme du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour l'addition sur le groupe $\ker(f)$.

(Rappel, pour l'addition sur l'ensemble des classes de restes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est définies par $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$.)