

Unité d'enseignement: Math I Algèbre
Contrôle continu final
13 janvier 2009 - durée 2 heures

- Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
- Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.
- Les questions étoilées sont facultatives.

Question : 1.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f: E \rightarrow F$ une application.

- (1) On suppose qu'il existe une application $r: E \rightarrow F$ telle que $r \circ f = id_E$. Montrer qu'alors f est injective.
- (2) On suppose f injective. Construire une application $r: F \rightarrow E$ telle que $r \circ f = id_E$.

Question : 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

- (1) Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'un entier $k \in \mathbb{N}$ admette un inverse (pour la multiplication) dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- (2) Faire la liste des éléments de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ qui sont inversibles (pour la multiplication).

Question : 3.

- (1) Déterminer tous les couples d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $11u + 7v = 1$.
- (2) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{1000} par 7 et par 11.
- (3)* Déduire des deux questions qui précèdent le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77.

Question : 4.

- (1) Résoudre en coordonnées cartésiennes l'équation dans \mathbb{C} :
$$z^2 = 2 + 2i$$
- (2) Ecrire $2 + 2i$ sous forme polaire. Résoudre alors l'équation en coordonnées polaires.
- (3) Déduire des deux questions qui précèdent la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Question : 5.

On considère les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (pour l'addition). On notera \bar{l} la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et \hat{l} la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \bar{l} &\mapsto \hat{l} \end{aligned}$$

est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes.

- (2) Déterminer le noyau $\ker(f)$ de f et dresser sa table de composition.
- (3)* Construire un isomorphisme entre $\ker(f)$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.