Math I Analyse

Examen du 19 décembre 2007

Durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est inutile de recopier les énoncés. Toutes réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la correction.

Question de cours 1

- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Donnez la définition d'une borne inférieure pour A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A admette une borne inférieure.
3. Si A admet a comme borne inférieure et si $A \subset \mathbb{Q}$, a-t-on nécessairement, $a \in \mathbb{Q}$?

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $|x| \leq \epsilon$. Montrer que $x = 0$.

Correction de la question de cours 1

-

1. Pour tout M
   La partie A admet une borne inférieure s'il existe $b \in A$ (b est la borne inférieure de A) tel que pour tout $a \in A$, $b \leq a$ et pour tout x minorant A, on a $x \leq b$.
2. A admet une borne inférieure si et seulement si A est minorée.
3. $A = \{r \in \mathbb{Q}; r^2 < 2\}$ admet $-\sqrt{2}$ comme borne inférieure et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Supposons que $x \neq 0$, alors il suffit de prendre $\epsilon = \frac{|x|}{2}$ pour montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $|x| < \epsilon$ est faux donc $x = 0$.

Question de cours 2

Enoncer les théorèmes suivants, puis rappeler la définition des notions mathématiques intervenant dans leur hypothèses :

- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des accroissements finis

Correction

- De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in I$, avec $f(a) \neq f(b)$, pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire dans $[f(a), f(b)]$ si $f(a) < f(b)$ ou dans $[f(b), f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.
- Soit une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

Exercice 1 :

Soit une fonction $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0, f'(1) = 0$$

On définit

$$g: [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(x) \leq g(c)$ pour tout $x \in [0,1]$
2. Montrer que g est dérivable en tout point $x \in]0,1]$ et calculer $g'(x)$. En déduire que $c \neq 1$.
3. Montrer que $c \neq 0$. En déduire que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

Correction exercice 1

1. Si $x \in]0,1]$ alors g est continue en tant que quotient de fonctions définies et continues.
En $x = 0$, pour $x > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Comme f est dérivable en 0, ce taux de variation admet une limite lorsque x tend vers 0 : $f'(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 = g(0)$$

Ce qui montre que g est continue en 0. g est continue sur $[0,1]$.
g est continue sur l'intervalle fermé et borné $[0,1]$ donc g est bornée et atteint ses bornes, en particulier g admet un maximum en une valeur $c \in [0,1]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \leq g(c)$.
2. Si $x \in]0,1]$ alors g est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in]0,1], \qquad g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

$$g'(1) = f'(1) - f(1) = -1 < 0$$

Si $c = 1$, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \leq g(1) = \frac{f(1)}{1} = 1$, soit $g(x) - g(1) \leq 0$
Ce qui signifie que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -1$$

Autrement dit

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]1 - \eta, 1[, \left| \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} - (-1) \right| < \epsilon$$

Or

$$\forall x \in]1 - \eta, 1[\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} > 0$$

Car le numérateur et le dénominateur sont strictement négatifs.
Prenons $\epsilon = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} + 1 \right| < \frac{1}{2}$$

Ce qui est impossible car la valeur absolue d'un nombre positif plus 1 ne peut-être inférieure à $\frac{1}{2}$.
Remarque :
Le fait que $g'(1) < 0$ montre qu'en $x = 1$ la pente de la tangente à la courbe est négative, l'ennui, c'est que l'on ne peut pas en déduire que sur un intervalle (même petit) cette dérivée est négative, ce qui est dommage, parce que dans ce cas on aurait pu dire que la fonction était décroissante sur un petit intervalle à droite de $x = 1$ et que donc $g(1)$ n'était pas un maximum.
3. $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ donc g n'admet pas de maximum en $x = 0$, autrement dit $c \neq 0$. Donc $c \in]0,1[$, la fonction g étant dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, si elle atteint son maximum en c alors $g'(c) = 0$, ce qui signifie que

$$\frac{f'(c)c - f(c)}{c^2} = 0$$

Ce qui équivaut à

$$f'(c)=\frac{f(c)}{c}$$

Exercice 2 :

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x)=\exp\left(-\frac{x}{n}\right)-2(1-x)$$

1. Dans cette question, l'entier $n\in\mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_n\in\,]0,1[$ tel que $f_n(x_n)=0$.
   (c) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif.
2. On considère maintenant la suite de terme général x_n.
   (a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$.
3. Il s'agit de calculer x.
   (a) Montrer que $\left(-\frac{x_n}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
   (b) Conclure.

Correction exercice 2

1. (a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f_n'(x)=-\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{x}{n}\right)+2\leq-\frac{1}{n}+2=\frac{-1+2n}{n}>0$$

Car $n\geq 1$

La dérivée de f_n étant positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, f_n est strictement croissante.

(b) $f_n(0)=\exp(0)-2(1-0)=1-2=-1<0$ et $f_n(1)=\exp\left(-\frac{1}{n}\right)-2(1-1)=\exp\left(-\frac{1}{n}\right)>0$

La fonction f_n étant continue sur l'intervalle $[0,1]$, f_n est une bijection de $]0,1[$ sur $\left]-1,\exp\left(-\frac{1}{n}\right)\right[$, il existe un unique $x_n\in\,]0,1[$ tel que $f_n(x_n)=0$.

(c)

$$f_n(x_n)=0\Leftrightarrow\exp\left(-\frac{x_n}{n}\right)-2(1-x_n)=0\Leftrightarrow\exp\left(-\frac{x_n}{n}\right)=2(1-x_n)$$

$$f_{n+1}(x_n)=\exp\left(-\frac{x_n}{n+1}\right)-2(1-x_n)=\exp\left(-\frac{x_n}{n+1}\right)-\exp\left(-\frac{x_n}{n}\right)$$

Comme

$$n+1>n$$

On a

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

Puis en multipliant par $x_n>0$

$$\frac{x_n}{n+1}<\frac{x_n}{n}$$

Puis par -1

$$-\frac{x_n}{n}<-\frac{x_n}{n+1}$$

On obtient

$$\exp\left(-\frac{x_n}{n}\right)<\exp\left(-\frac{x_n}{n+1}\right)$$

Ce qui montre que

$$f_{n+1}(x_n)>0$$

2. (a) Pour tout $n\geq 1$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$0=f_{n+1}(x_{n+1})<f_{n+1}(x_n)\Leftrightarrow x_{n+1}<x_n$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

(b) Comme $x_n \in]0,1[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, comme elle est décroissante, elle converge vers une limite x.

3. (a) $0 < x_n < 1$ donc $0 < \frac{x_n}{n} < \frac{1}{n}$, d'après le théorème des gendarmes
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} -\frac{x_n}{n} = 0$$
(b) On fait tendre n vers l'infini dans l'expression
$$\exp\left(-\frac{x_n}{n}\right) - 2(1-x_n) = 0$$
$$\exp(0) - 2(1-x) = 0$$
Ce qui équivaut à
$$1 - 2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x)f(-x) = 1 \qquad (1)$$

1. On définit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$. Démontrer que g est constante. (Commencer par calculer sa dérivée.)
2. On note C la valeur pris par g. Montrer que C est non nul, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f(x)}{C}$.
3. En déduire que f est de la forme $f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)$ avec $\lambda \neq 0$.
4. Réciproquement, montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, la fonction $f: x \to \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)$ vérifie la propriété (1)

Correction exercice 3

1. g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
$$g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)\big(-f'(-x)\big) = 1 - f(x)f'(-x)$$
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x)f(-x) = 1$, l'égalité est vraie en changeant x en $-x$:
$$f'(-x)f(x) = 1$$
Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 0$ donc g est constante.
2. D'après (1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq 0$ par conséquent en changeant x en $-x$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, on en déduit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x)f(-x) \neq 0$$
On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = C \ \ et \ \ f'(x)f(-x) = 1$$
Ce qui équivaut à
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{C}{f(x)} \ \ et \ \ f(-x) = \frac{1}{f'(x)}$$
Car d'après (1) ni $f(x)$ ni $f'(x)$ ne peuvent être nul. On en déduit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{C}{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$
Ce qui équivaut à
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{f(x)}{C}$$
3. D'après 2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{C}$$

En intégrant cette inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln|f(x)| = \frac{x}{C} + K, K \in \mathbb{R}$$

Ce qui équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = \exp\left(\frac{x}{C} + K\right) = \exp\left(\frac{x}{C}\right) \times \exp(K), K \in \mathbb{R}$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(K) \times \exp\left(\frac{x}{C}\right), K \in \mathbb{R}$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\exp(K) \times \exp\left(\frac{x}{C}\right), K \in \mathbb{R}$$

Dans tous les cas on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{C}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque :

Il aurait été plus simple de dire que f vérifiait l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{y}{C} = 0$$

Et d'utiliser le résultat du cours qui dit que les solutions sont de la forme

$$y(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{C}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

D'autre part f vérifie (1) donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda}{C}\exp\left(\frac{x}{C}\right)\lambda \exp\left(-\frac{x}{C}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{C} = 1 \Leftrightarrow C = \lambda^2$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right), \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Car $C \neq 0$

4. $\lambda \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)f(-x) = \frac{\lambda}{\lambda^2}\exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)\lambda \exp\left(-\frac{x}{\lambda^2}\right) = 1$$

f vérifie bien (1).