Math I Analyse

Examen du 19 décembre 2007

Durée 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices, téléphones portables et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est inutile de recopier les énoncés. Toutes réponse doit être justifiée. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans la correction.

Question de cours 1

- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Donnez la définition d'une borne inférieure pour A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A admette une borne inférieure.
3. Si A admet a comme borne inférieure et si $A \subset \mathbb{Q}$, a-t-on nécessairement, $a \in \mathbb{Q}$?

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $|x| \leq \epsilon$. Montrer que $x = 0$.

Question de cours 2

Enoncer les théorèmes suivants, puis rappeler la définition des notions mathématiques intervenant dans leur hypothèses :

- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des accroissements finis

Exercice 1 :

Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0, f'(1) = 0$$

On définit

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(x) \leq g(c)$ pour tout $x \in [0,1]$
2. Montrer que g est dérivable en tout point $x \in]0,1]$ et calculer $g'(x)$. En déduire que $c \neq 1$.
3. Montrer que $c \neq 0$. En déduire que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \exp\left(-\frac{x}{n}\right) - 2(1 - x)$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   (c) Montrer que $f_{n+1}(x_n)$ est strictement positif.
2. On considère maintenant la suite de terme général x_n.
   (a) Montrer à l'aide de la question précédente que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$.
3. Il s'agit de calculer x.

(a) Montrer que $\left(-\frac{x_n}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(b) Conclure.

Exercice 3 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x)f(-x) = 1 \qquad (1)$$

1. On définit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)f(-x)$. Démontrer que g est constante. (Commencer par calculer sa dérivée.)
2. On note C la valeur pris par g. Montrer que C est non nul, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{f(x)}{C}$.
3. En déduire que f est de la forme $f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)$ avec $\lambda \neq 0$.
4. Réciproquement, montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, la fonction $f: x \to \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right)$ vérifie la propriété (1)

Dans tous les cas on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{C}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque :

Il aurait été plus simple de dire que f vérifiait l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y' - \frac{y}{C} = 0$$

Et d'utiliser le résultat du cours qui dit que les solutions sont de la forme

$$y(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{C}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

D'autre part f vérifie (1) donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\lambda}{C} \exp\left(\frac{x}{C}\right) \lambda \exp\left(-\frac{x}{C}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{C} = 1 \Leftrightarrow C = \lambda^2$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right), \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Car $C \neq 0$

1. $\lambda \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)f(-x) = \frac{\lambda}{\lambda^2} \exp\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) \lambda \exp\left(-\frac{x}{\lambda^2}\right) = 1$$

f vérifie bien (1).