Université Claude Bernard Lyon 1

Licence "Sciences et technologie"

Unité d'enseignement "Mathématiques I (Algèbre)" (groupe 1)

Examen terminal (deuxième session)

vendredi 19 janvier 2007 - Durée : 1 heure et 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée. Le sujet est imprimé sur une seule page.

Exercice 1

On considère le groupe multiplicatif $((\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*, \times)$.

1) Rappeler le théorème qui permet d'affirmer que $((\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*, \times)$ est bien un groupe.

2) Quel est l'inverse de la classe de 5 dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$?

3) Montrer que pour tout élément x de $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^*$, on a $x^9 = x^{-1}$, où x^{-1} désigne l'inverse de x.

4) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ de l'équation $x^9 + 5 = 0$.

Exercice 2

1) Montrer que les entiers 28 et 15 sont premiers entre eux.

2) Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $28x + 15y = 0$.

3) Donner une solution de l'équation $28x + 15y = 1$.

4) Résoudre dans $\mathbf{Z}^2$ l'équation $28x + 15y = 1$.

Exercice 3

Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les ensembles :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} \text{ et } E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x - y - 2z = 0\}.$$

1) Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

On admettra sans en dire davantage que E_2 est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2) a) Fournir un vecteur de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas élément de E_1.

b) Justifier pourquoi la famille $((1, 0, 1), (-2, 1, 0))$ est une famille libre formée de vecteurs de E_1.

c) Déduire des deux questions qui précèdent la dimension de E_1 puis que la famille $((1, 0, 1), (-2, 1, 0))$ est une base de ce sous-espace.

3) Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.

4) Déterminer le sous-espace $E_1 + (E_1 \cap E_2)$.

5) Expliciter un sous-espace $F \subset \mathbf{R}^3$ de dimension 1 et tel que $F + E_1 = \mathbf{R}^3$.