Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

Feuille d'exercices n° 1

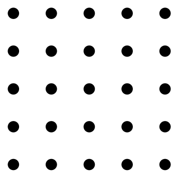
COMBINATOIRE. CARDINAUX DES ENSEMBLES FINIS, DÉNOMBRABILITÉ

---

1 Dénombrements concrets

1.1 Rectangles dans une grille

Soit n un entier naturel. Sur une grille carré à n^2 points, combien peut-on tracer de rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes ?



1.2 Mots de passe

1. Vous devez choisir un mot de passe pour votre carte bancaire. Le mot de passe peut contenir les chiffres de 0 à 9 sans restriction et peut avoir de 4 à 7 caractères. Combien de mots de passe pouvez-vous obtenir ?
2. Supposons qu'un voleur vous a vu utiliser votre carte bancaire, et qu'ensuite vous l'a volée. Il a observé que le code est formé de 5 chiffres, ne commence pas par 0, et contient 8. De combien d'essais a-t-il besoin (au plus) pour trouver votre code ?

1.3 Quelques mains de poker

Est-il besoin de rappeler qu'on joue au poker avec un paquet de 52 cartes, réparties en 4 couleurs, chacune faisant apparaître 13 hauteurs (R, D, V, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, As) ? Une main, c'est 5 cartes sans ordre déterminé. Calculer le nombre :

1. de mains ;
2. de mains contenant une quinte ; une quinte flush ; une quinte non flush ;
3. de mains contenant un carré ;
4. de fulls (un brelan et une paire, de hauteurs différentes bien sûr) ;
5. de mains contenant un brelan, mais pas un carré ;
6. de mains contenant exactement une paire (et pas de brelan) ;
7. de mains contenant une ou deux paires.

1.4 Rubik's cube

1. Combien y a-t-il de facettes dans un Rubik's cube standard ($3 \times 3 \times 3$) ? Dénombrer de deux façons différentes les pièces de chaque sorte : centres des faces, arêtes, coins.
2. Sachant que chaque coin (resp. chaque arête) peut être dans trois (resp. deux) positions différentes, estimer[1] le nombre de configurations du Rubik's cube.

1. En réalité, une configuration sur deux ne peut pas être atteinte sans démonter le cube.

1.5 Ordres d'arrivée

1. Dix personnes participent à un marathon. Combien d'ordres d'arrivée sont-ils possibles ?
2. Assumons que seulement le premier, le deuxième, et le troisième arrivés prennent des médailles. Combien y a-t-il de possibilités pour la liste des médailles ?
3. Parmi les dix personnes qui participent au marathon, trois doivent s'habiller avec un maillot jaune. Pour calculer de combien de façons on peut choisir ces trois personnes on raisonne comme suit.

   "*Il y a* 10 *possibilités pour choisir la première personne,* 9 *pour choisir la deuxième, et* 8 *pour le troisième. Cela nous donne* $10 \times 9 \times 8$ *possibilités.*"

   Est-ce correct ?

2 Récurrence, sommes, coefficients binomiaux

2.1 Nombre de sous-ensembles

Montrer à l'aide d'une bijection avec l'ensemble $\{0,1\}^n$, que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble S avec $|S| = n$ est 2^n. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2.2 Règle de la somme

Si $S = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$ est l'union des ensembles disjoints S_i, alors $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$. Utiliser la règle de la somme pour prouver que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1,$$

et pour évaluer la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k)2^{k-1}.$$

2.3

En comptant en deux façons différentes montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

2.4 Chemins Nord-Est

Soient a et b deux entiers naturels. Montrer que le coefficient binomial $\binom{a+b}{a}$ est :

- le nombre de mots de $a+b$ lettres écrits avec a lettres E et b lettres N (exemple EENENNEENE) ;
- le nombre de chemins de $(0,0)$ vers (a,b) sur une grille rectangulaire qui vont seulement vers le Nord ou vers le Est (Figure 1).

On pourra utiliser ce modèle géométrique pour la preuve des identités ci-dessous.

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;
2. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

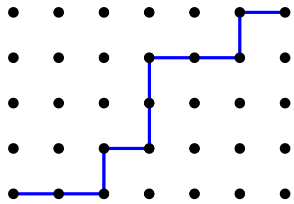


FIGURE 1 – Chemin NE dans une grille rectangulaire

3. $\sum_{i=0}^{n} \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n}$.
4. $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.
5. $2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$;
6. $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$;
7. $\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}$.
8. $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ (Identité de Vandermonde)

2.5 Principe des tiroirs

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des ensembles finis à deux à deux disjoints tels que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| > kr,$$

alors il existe au moins un index i pour lequel $|A_i| > r$.

1. La population de New York est de plus de 7500000 habitants. Prouver que actuellement à New York, il a y au moins 8 habitants qui sont nés à la même heure, le même jour de la même année.
2. Soit $1, 3, 7, 15, \ldots$ la suite dont le i-ème terme est $a_i = 2^i - 1$. Soit q un entiér impair quelconque. Montrer que la suite des $\{a_i\}_i$ contient au moins un élément divisible par q.

2.6 Nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibinacci sont définis par :

$$F_1 = F_2 = 1, \text{ et pour } \quad n \geq 3 \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

1. Soit $f(n)$ le nombre des sous-ensembles de $[n]$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Trouver la récurrence satisfaite par ces nombres, et en déduire les nombres $f(n)$.
2. Soit $f(n, k)$ le nombre de sous-ensembles de cardinal k de l'ensemble $[n]$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Montrer que

$$f(n, k) = \binom{n-k+1}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} f(n, k) = F_{n+2}.$$

2.7 Partitions d'ensembles

Soient $S(n,k)$ le nombre de Stirling de seconde espèce, c'est-à-dire le nombre de partitions d'ensemble de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ en k parties.

1. Calculer $S(n,1)$ et trouver une formule pour $S(n,2)$.
2. Calculer le nombre de fonctions surjectives de $[n]$ vers $[3]$. Utiliser ce résultat pour montrer que $S(n,3) = \dfrac{3^{n-1}+1}{2} - 2^{n-1}$.
3. Montrer la récurrence verticale $S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S(n-i, k-1)$.

2.8 Nombres de Bell

Le nombre (total) de partitions (d'ensemble) de $[n]$ est appelé le n-ème *nombre de Bell.* Il est clair que $B(n) = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)$.

1. Prouver que pour tout $n \geq 0$, $B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$.
2. Prouver par récurrence que pour $n \geq 3$, on a $B(n) < n!$.

2.9 Listes

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de X, ($|X| = n$) telles que

   (a) $A \subset B$; (b) $A \supset B$; (c) $A \cap B = \emptyset$.

   On pourra dans chaque cas effectuer un calcul avec les coefficients binomiaux ou utiliser une matrice de taille $2 \times n$ remplie de 0 et de 1.
2. Pour $|X| = n$ et $r \geq 1$, calculer le nombre de r-listes de parties $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_r \subset X$.
3. Pour X de cardinal n, déterminer le nombre de r-listes $(A_1, \ldots, A_r)$ de parties de X telles que $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = X$. On pourra écrire une matrice $r \times n$ de 0 et de 1.

2.10 Principe d'Inclusion-Exclusion

1. Parmi les nombres de 1 à 300, combien sont divisibles par au moins l'un des nombres 3, 5 et 7 ?
2. Soient X, Y, Z trois ensembles tels que $|X| = 10$, $|X \cap Y| = 7$ et $|X \cap Z| = 9$. Vérifier que $|X \cap Y \cap Z|$ ne peut prendre que deux valeurs. En supposant de plus que $|Y| = 15$, $|Z| = 20$ et $|Y \cap Z| = 8$, déterminer les valeurs possibles de $|X \cap Y \cap Z|$.
3. Soit n un entier et soit d_n le nombre de dérangements de S_n. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note B_i l'ensemble des permutations qui ne fixent pas i et A_i son complémentaire. Avec le principe d'inclusion-exclusion, démontrer que
$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

3 Ensembles finis et infinis

3.1 Ensembles finis

Soient E et F deux ensembles finis ; montrer que :

1. la réunion $E \cup F$ est fini, et : $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$.
2. le produit cartésien $E \times F$ est fini, et : $|E \times F| = |E| \times |F|$;
3. l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications $E \to F$ est fini, de cardinal $|F|^{|E|}$;
4. l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles de E est fini, et : $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

3.2 Ensembles infinis

Montrer que :

1. Si E est infini, alors $E \times E$ est infini.
2. Si E est infini, alors $\mathcal{P}(E)$ est infini.
3. Si F est infini, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est infini.

3.3 Ensembles dénombrables ou pas

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?
2. On suppose que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est dénombrable et on note $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une bijection. En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$, trouver une contradiction.
3. En utilisant l'argument de la diagonale de Cantor, montrer que le sous-ensemble $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est non-dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{R}$ et l'ensembles des suites binaires infinies sont équipotents.

3.4 Caractérisation d'ensembles infinis

On rappelle un théorème du cours : un ensemble F est infini si et seulemnt s'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans F.

1. Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non singleton) est infini.
2. Montrer qu'un ensemble E est fini si et seulement si toute partie non-vide de $\mathcal{P}(E)$ possède un élément maximal pour l'inclusion.

3.5 Ensembles non dénombrables

1. Montrer que, si F est infini, alors F est équipotent à $E \setminus A$ pour tout sous-ensemble fini A de F. Est-ce que la propriété est encore vraie si F est fini ?
2. Montrer que, si F est infini non-dénombrable, alors F est équipotent à $E = F \setminus I$ pour tout sous-ensemble dénombrable I de F. Est-ce que la propriété est vraie si F est dénombrable ?

4 Dénombrement élémentaire

4.1

Pour $n, k \in \mathbb{N}$ déterminer les coefficients $b_{n,k}$ dans l'identité

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x+1)^k.$$

En déduire l'inverse de la matrice de Pascal $P = \left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leq n,k \leq m}$ pour tout entier $m \geq 0$.

4.2

Soit $S(n, k)$ le nombre de Stirling de 2-ième espèce, i.e., le nombre de partitions en k parties d'un ensemble à n éléments. Par convention $S(0, 0) = 1$. Démontrer l'identité polynomiale en x :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} k! S(n, k) \binom{x}{k}.$$

On pourra donner une preuve (interprétation) combinatoire de cette identité en supposant que $x \in \mathbb{N}$..

4.3

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ on définit une nouvelle fonction Δf, appelée la première différence de f, par $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$. On appelle Δ l'opérateur de la première diffrence et définit la k-ième différence de f par

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f).$$

1. Vérifier que
$$\Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(n+i).$$
2. Montrer que f est un polynôme de degrée $\leq d$ si et seulement si $\Delta^{d+1} f(n) = 0$ (ou $\Delta^d f(n) = 0$ est un constant).
3. Si le polynôme f de degré $\leq d$ est développé dans la base $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq d$, alors les coefficients sont $\Delta^k f(0)$; c'est-à-dire,
$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{n}{k}.$$
4. En déduire $\Delta^k 0^d = k! S(d,k)$ pour $f(n) = n^d$.

4.4

Soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Par convention $B_0 = 1$. On appelle B_n le n-ième nombre de Bell.

a. Montrer que les nombres de Bell satisfont la relation de récurrence
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$
pour tout $n \geq 0$. Calculer la valeur de B_k pour $1 \leq k \leq 4$.

b. Par récurrence sur $n \geq 0$ démontrer la formule de Dobinski
$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad (n \geq 0),$$
où $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ est la base des logarithmes naturels.

5 Lemme de Zorn

5.1

Soient X et Y deux ensembles. On dit que $|X| \leq |Y|$ s'il existe une injection $\varphi : X \to Y$. La relation $\leq$ est une relation d'ordre. En utilisant le Lemme de Zorn, montrez que cette relation est un ordre total, autrement dit, si X et Y sont deux ensembles, il y en a au moins un qui peut s'injecter dans l'autre.

5.2

Montrez que tout espace vectoriel V sur un corps $\mathbb{K}$ admet une base.
Indication : considérez l'ensemble $\mathcal{V}$ des familles libres dans V ordonné par l'inclusion et appliquez le Lemme de Zorn.