Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2021-2022

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

Feuille d'exercices n° 5

GRAPHES

---

1 Notions de base

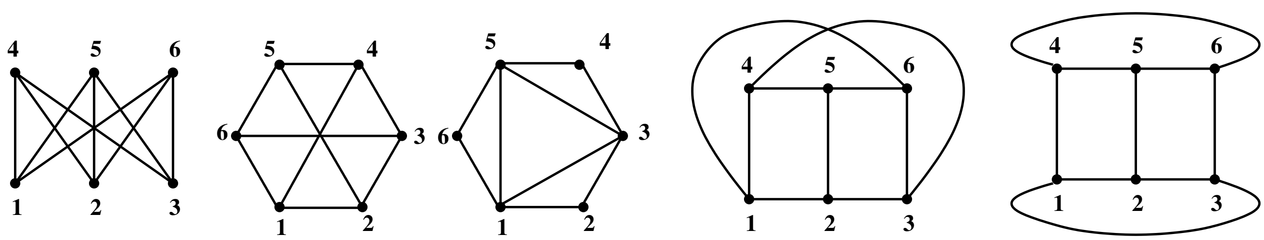
1.1

Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 définis par :

1. $V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_1) = \{e, f, g, h\}$,
   $\psi_{G_1}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_1}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_1}(g) = \{3, 4\}, \psi_{G_1}(h) = \{4, 1\}$,
2. $V(G_2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_2) = \{e, f, g, h\}$,
   $\psi_{G_2}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_2}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_2}(g) = \{3, 1\}, \psi_{G_2}(h) = \{4, 1\}$,
3. G_3 est le graphe complet K_3
4. G_4 est le graphe complet K_4.

1.2

Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes suivants.



1.3

Représenter par un diagramme le graphe G avec matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4

Déterminer les matrices d'adjacence et d'incidence du premier et deuxième graphe de l'exercice 1.2.

1.5

Pour tout graphe $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, montrez que

1. $\sum_{s \in \mathcal{S}} d(s) = 2|\mathcal{A}|$.
2. $\min_{s \in \mathcal{S}} d(s) \leq \frac{2|\mathcal{A}|}{|\mathcal{S}|} \leq \max_{s \in \mathcal{S}} d(s)$.

1.6

La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombres d'autres : $0, 1, \ldots,$ mains. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personne est pair.

1.7

Montrer que dans un graphe simple avec au moins deux sommets il y a deux sommets de même degré.

1.8

Prouver que si $\mathcal{G}$ est un graphe connexe à n sommets, alors $\mathcal{G}$ possède au moins $n-1$ arêtes.

1.9

Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle.

1. Montrez que un graphe à n sommets est un arbre si et seulement s'il est connexe et possède exactement $n-1$ arêtes.
2. Prouver que si un graphe à n sommets, chacun de degré au moins 2, possède un cycle.
3. Prouver que si un graphe possède n sommets et au moins n arêtes, alors il possède un cycle.

1.10

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{S} = \{0, 1\}^n$, c.à.d. $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des 0-1–suites de longueur n. Deux sommets forment une arête ssi les suites diffèrent dans exactement une coordonnée.
Ce graphe s'appelle cube de dimension n. Déterminer

1. le nombre des arêtes
2. les degrés des sommets
3. la distance maximale des deux sommets dans ce graphe.

1.11

Les séquences de degrés suivantes sont-elles réalisables ? Dans le cas positif, exhiber un graphe qui les réalise.

1. (2,3,3,4,5,6,7)
2. (1,3,3,4,5,6,6)
3. (1,1,2,2,2,3,3,4,6)

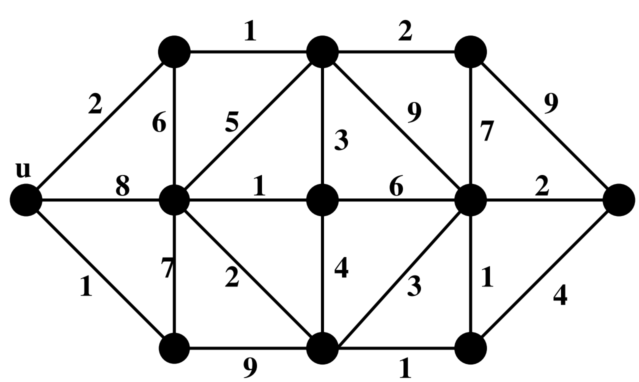
1.12

1. Trouver les matrices d'adjacence des graphes d'exercice 1.2.
2. Trouver les nombres des chaînes de longueur 3 de sommet 1 à sommet 2 dans chaque graphe.
3. Trouver les nombres de toutes les chaînes fermeés de longueur 3 dans chaque graphe.

2 Algorithme de Dijkstra

2.1

Trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets.



2.2

Choisir un sommet u et trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets. Répéter pour un autre sommet v et comparer le résultat.