Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 3
Mesures

Sauf mention contraire, μ dénote une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
(2) Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
(3) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
(4) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
(5) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
(6) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
(7) La mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ est σ-finie.

Exercice 2 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles (A_n) telle que $\mu(A_n) \not\to \mu(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n)$.

Exercice 3 On rappelle que μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n. Montrer que si μ est σ-finie, on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable tel que la tribu $\mathscr{T}$ contient les singletons. Soit μ une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$. On note $D = \{x \in X \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}$. Montrer que D est au plus dénombrable. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose plus que la mesure est finie ? Et si on suppose que la mesure est σ-finie ?

Exercice 5
(a) Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \Delta B)$.
(b) Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X)$. Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.
(c) Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geqslant \dfrac{\mu(X)}{n}$.

Exercice 6 (Partiel automne 2006) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{T}' = \{A \in \mathscr{T} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$

Montrer que $\mathscr{T}'$ est une tribu dans X.

Exercice 7 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *quelconque* de parties mesurables.
(a) Établir les encadrements suivants :

$(a1)$ $\sup_{n\geqslant 1} \mu(A_n) \leqslant \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

$(a2)$ $0 \leqslant \mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$.

(b) Montrer les implications suivantes :

$(b1)$ $\forall n, \mu(A_n) = 0 \Longrightarrow \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = 0$.

$(b2)$ $\mu(X) = 1$ et $\forall n, \mu(A_n) = 1 \Longrightarrow \mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) = 1$.

Exercice 8 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, tel que pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{x\}) < +\infty$. On dit que μ est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout $x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.
(a) Montrer que μ est diffuse si et seulement si toute partie A au plus dénombrable est μ−négligeable.

(b) Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de E et une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telles que $\mu = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{a_n}$.
(c) On suppose maintenant que la *mesure μ est $\sigma-$finie*. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$ où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 9 Mesure image. Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{T}')$ des espaces mesurables, et $\phi : X \to Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. On définit $\nu : \mathscr{T}' \to [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.
(a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}'$. On dit que c'est la mesure image de μ par ϕ, et on la note $\phi_*\mu$.
(b) On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in X$. Déterminer $\phi_*\delta_a$.
(c) On suppose que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ vérifiant $\mu(X) = 1$. On fixe $B \in \mathscr{T}$ et on choisit $(Y, \mathscr{T}') = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$. Déterminer $(\mathbf{1}_B)_*\mu$.

Exercice 10 Applications préservant une mesure.
On fixe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $\mu(X) < +\infty$. On dit qu'une application $f : X \to X$ préserve μ si pour tout $A \in \mathscr{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ et $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Soit f une application qui préserve μ. On pose $f^1 = f$, et $f^{n+1} = f^n \circ f$, pour $n \geqslant 1$.
(1) Monter que f^n préserve μ pour tout $n \geqslant 1$.
(2) On fixe $A \in \mathscr{T}$. Soit $F = \{x \in A \text{ t.q. } \forall n \geqslant 1, f^n(x) \notin A\}$.
(2a) Montrer que $F \in \mathscr{T}$.
(2b) Pour $p \geqslant 1$, soit $F_p = (f^p)^{-1}(F)$. Montrer que les ensembles (F_p) sont deux à deux disjoints.
(2c) En déduire que $\mu(F) = 0$.

Exercice 11 Fonction de répartition. Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.
Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $F(t) = \mu(]-\infty, t[)$.
(a) Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.
(b) Montrer que F est croissante.
(c) Déterminer les limites de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
(d) Montrer que F est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur $\mathbf{R}$.
On suppose désormais que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(e) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de $\mathbf{R}$. On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
(f) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
(g) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F. Que vaut $\nu(]-\infty, x[)$ pour $x \in \mathbf{R}$?
(h) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\frac{1}{2}(b-a)$ et tel que $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$.

Exercice 12 (Théorème d'Egoroff, **Partiel avril 2007**)
Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f.

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,
$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$
Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}\cdot$ Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.