



Université Claude Bernard



Lyon 1

Etude d'un modèle épidémiologique de vaccination

Julie CAVADINI

Juillet 2026

Encadré par Monsieur Léon Matar TINE

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modèle considéré	4
2.1	Existence et unicité d'une solution locale	4
2.2	Quasi-positivité du système	5
2.3	Existence d'une solution globale	6
2.4	Représentation des compartiments du modèle	7
2.5	Recherche d'un équilibre sain	7
2.6	Taux de reproduction de base du système	8
2.6.1	Calcul via la matrice de seconde génération	8
2.6.2	Conditions équivalentes à $R_0 < 1$	12
2.7	Analyse de la stabilité	13
2.7.1	Stabilité locale de l'équilibre sain	13
2.7.2	Stabilité globale de l'équilibre sain	14
2.8	Application numérique	17
2.8.1	Cas où $R_0 < 1$	18
2.8.2	Cas où $R_0 > 1$	19
3	Bibliographie	21

1 Introduction

La modélisation épidémiologique a été introduite par Bernoulli au 18e siècle durant l'épidémie de la variole. Le principal intérêt étant de pouvoir anticiper l'évolution de l'épidémie et d'informer les pouvoirs publics des conséquences. On veut pouvoir savoir si l'épidémie va se résorber ou se propager afin de conclure à l'éventuel besoin d'une intervention externe. L'étude du système va également pouvoir déterminer des solutions qui pourront être utile à la prise de décision des services publics. Par exemple, il sera possible de prouver qu'augmenter le taux de vaccination fera baisser le nombre d'individus infectés. Les modèles utilisés sont variés et sont donc utiles pour différents types de maladies comme la grippe, le paludisme ou encore le Covid.

Différents modèles sont possibles pour étudier les épidémies, on fait le choix ici de se concentrer uniquement sur des EDO(s) (équations différentielles ordinaires) car notre système ne prend pas en compte les caractéristiques des individus tel que l'âge par exemple. Si c'était le cas on se serait intéressé aux EDP(s) (équations aux dérivées partielles) mais cela implique plus de liaisons que l'on mettra de côté dans cette étude où nous supposons donc une population homogène.

D'année en année les modèles épidémiologiques se sont complexifiés pour se rapprocher le plus de la réalité soit à travers une approche déterministe faisant intervenir des EDO(s) ou EDP(s) ou une approche stochastique faisant intervenir des variables aléatoires.

On s'intéressera dans ce rapport à l'approche déterministe avec les EDO(s) où la modélisation se fera par compartiments. Ainsi, la population considérée sera subdivisée en plusieurs compartiments comme par exemple SI (Susceptibles et Infectés), SIR (Susceptibles, Infectés et Résistants) ou même SEIR (Susceptibles, Exposés, Infectés, et Résistants).

Plus précisément, dans ce travail il s'agit de considérer un modèle SI avec vaccination.

L'objectif de ce projet est d'étudier un système d'équations représentant une population composée de 4 catégories : les Susceptibles, les Susceptibles vaccinés, les Infectés et les Infectés vaccinés. On montrera que le système est bien défini avec l'existence locale et globale d'une solution. On étudiera le point d'équilibre sain, le taux de reproduction, la stabilité locale et globale du point d'équilibre trouvé puis nous finirons par des simulations numériques pour visualiser les calculs théoriques qui auront été présenté tout au long de l'étude.

2 Modèle considéré

On se propose d'étudier le modèle suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = (1-p)\pi - \mu S(t) - (\beta I(t) + \beta_v I_v(t))S(t) \\ S'_v(t) = p\pi - \mu S_v(t) - (1-r)(\beta I(t) + \beta_v I_v(t))S_v(t) \\ I'(t) = (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I(t) \\ I'_v(t) = (1-r)(\beta I(t) + \beta_v I_v(t))S_v(t) - (\mu + \nu_v)I_v(t) \end{cases} \quad (1)$$

où S sont les susceptibles non vaccinés, I les infectés non vaccinés, S_v sont les susceptibles vaccinés et I_v sont les infectés vaccinés. La variable $t \in \mathbb{R}^+$ représente le temps.

Pour faciliter les notations, on s'abstiendra d'ajouter la variable t dans le système, on réécrit donc (1) tel que :

$$\begin{cases} S' = (1-p)\pi - \mu S - (\beta I + \beta_v I_v)S \\ S'_v = p\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v \\ I' = (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I \\ I'_v = (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v \end{cases} \quad (2)$$

- π est le nombre d'entrées (naissance ou migration) par unité de temps,
- p est la probabilité d'être vacciné,
- μ est le taux de mortalité naturelle,
- ν et ν_v sont les taux de transition respectif de guérison en étant infecté et en étant infecté mais vacciné,
- β et β_v sont les taux de transmissions respectifs d'un infecté et d'un infecté vacciné,
- r est le taux d'efficacité du vaccin.

On supposera pour l'étude de ce système que $p, r \in]0, 1[$ et que $\mu, \nu, \nu_v, \beta, \beta_v, \pi > 0$. Les conditions initiales seront $S(0) \geq 0$, $S_v(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $I_v(0) \geq 0$.

2.1 Existence et unicité d'une solution locale

Définition :

$f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne en la variable d'état si : $\exists V$ voisinage de $(t_0, y_0) \in I \times U$ tel que $\forall (t, x), (t, z) \in V, \exists l \geq 0, \|f(t, x) - f(t, z)\| \leq l\|x - z\|$

Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Soit I un intervalle ouvert, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 0$. $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$. On suppose que f satisfait les hypothèses H_1 et H_2 .

$$\begin{aligned} H_1 : f &\text{ continue sur } I \times U \\ H_2 : f &\text{ localement lipschitzienne en la variable d'état.} \end{aligned}$$

Alors $\forall (t_0, y_0) \in I \times U$, le (PC)

$$(PC) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t \in I$$

admet une unique solution maximale $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ où J est un ouvert.

On écrit (2) tel que :

$$\begin{cases} S' = f_1(S, S_v, I, I_v) \\ S'_v = f_2(S, S_v, I, I_v) \\ I' = f_3(S, S_v, I, I_v) \\ I'_v = f_4(S, S_v, I, I_v) \end{cases} \quad (3)$$

avec f_1, f_2, f_3, f_4 données par

$$\begin{cases} f_1(S, S_v, I, I_v) = (1-p)\pi - \mu S - (\beta I + \beta_v I_v)S \\ f_2(S, S_v, I, I_v) = p\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v \\ f_3(S, S_v, I, I_v) = (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I \\ f_4(S, S_v, I, I_v) = (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu)I_v \end{cases}$$

Le champ de vecteurs associé à (2) est : $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^4, (t, x) \mapsto (f_1(t, x), f_2(t, x), f_3(t, x), f_4(t, x))$ où I est intervalle ouvert non vide et U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^4$.

Comme f est $C^\infty(I, U)$, car polynomiale alors f satisfait H_1 et H_2 .

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour toute condition initiale $(S_0, S_{v0}, I_0, I_{v0})$ positive, il existe une unique solution maximale définie sur $]0, T[\times U$.

2.2 Quasi-positivité du système

Montrons la quasi-positivité du système afin de pouvoir garantir que S, S_v, I, I_v sont positifs tout au long de l'étude.

$$\text{Soit } X' = f(X) \text{ D'après (3), on identifie } X' = \begin{pmatrix} S' \\ S'_v \\ I' \\ I'_v \end{pmatrix} \text{ et } f = (f_1, f_2, f_3, f_4).$$

D'après la méthode d'Alain Haraux, on vérifie que $f_i \geq 0$ quand $x_i = 0$ et que toutes les autres composantes sont positives.

Ainsi, pour notre système on a :

$$\begin{aligned} f_1(0, S_v, I, I_v) &= (1-p)\pi \geq 0 \text{ car } p, \pi > 0 \text{ par hypothèse.} \\ f_2(S, 0, I, I_v) &= p\pi \geq 0. \end{aligned}$$

$f_3(S, S_v, 0, I_v) = \beta_v I_v S$ on a $\beta_v \geq 0$, $S \geq 0$, $I_v \geq 0$

$f_4(S, S_v, I, 0) = (1-r)\beta I S_v$ On a $r \in [0, 1]$ donc $1-r \geq 0$, $\beta \geq 0$, $S_v \geq 0$ et $I \geq 0$ donc $I_v \geq 0$.

On a donc bien montré la quasi-positivité de (2) d'où la positivité de la solution c'est-à-dire $S \geq 0$, $S_v \geq 0$, $I \geq 0$, $I_v \geq 0$.

2.3 Existence d'une solution globale

La population totale P vérifie la relation suivante :

$$P = S + S_v + I + I_v$$

Si on suppose P constante alors : $P'(t) = S'(t) + S'_v(t) + I(t) + I'_v(t) = 0$

$$P'(t) = (1-p)\pi - \mu S - (\beta I + \beta_v I_v)S + p\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v + (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v$$

$$P' = \pi - \mu S - \mu S_v - (\mu + \nu)I - (\mu + \nu_v)I_v$$

$$\pi = \mu S + \mu S_v + (\mu + \nu)I + (\mu + \nu_v)I_v$$

$$\pi = \mu(S + S_v + I + I_v) + \nu I + \nu_v I_v.$$

$$\text{Ce qui implique } P(t) = \frac{\pi - \nu I - \nu_v I_v}{\mu}.$$

On a donc la condition de population totale constante si les entrées compensent les sorties.

Lemme de Gronwall :

Soit $\mathcal{I}$, $t_0 \in \mathcal{I}$, $a, b : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathcal{I}$. Soit $y : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que - $y \in C^1(\mathcal{I})$ - $\forall t \in \mathcal{I}$, avec $t \geq t_0$, $y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t)$ alors

$$y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(z)dz} ds$$

D'après une conséquence du théorème d'explosion en temps fini, si une solution maximale est bornée alors elle est globale. Nous allons chercher à montrer que P est bornée ainsi par suite S, S_v, I, I_v seront bornées et on aura donc une solution globale.

On a que $P'(t) = S'(t) + S'_v(t) + I(t) + I'_v(t)$

$$P'(t) = (1-p)\pi - \mu S - (\beta I + \beta_v I_v)S + p\pi - \mu S_v - (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v + (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v$$

$$P' = \pi - \mu S - \mu S_v - (\mu + \nu)I - (\mu + \nu_v)I_v$$

$$P' = \pi - \mu(S + S_v + I + I_v) - \nu I - \nu_v I_v$$

$$P' = \pi - \mu P - \nu I - \nu_v I_v$$

Par positivité de I et I_v , on a $-\nu I - \nu_v I_v \leq 0$ d'où $P' \leq \pi - \mu P$.

On utilise lemme Gronwall car P est C^1 , μ et π sont constantes donc continues sur $[0, \infty[$ et $t_0 \in [0, \infty[$.

On reprend l'expression trouvée et on obtient donc :

$$P(t) \leq P(t_0)e^{-(t-t_0)\mu} + (\pi e^{-\mu t}) \frac{e^{\mu t} - e^{\mu t_0}}{\mu}.$$

Soit $t_0 = 0$ alors : $P(t) \leq P(0)e^{-t\mu} + (\pi e^{-t\mu}) \frac{e^{t\mu} - 1}{\mu}$ d'où $P(t) \leq \frac{\pi}{\mu} + (P(0) - \frac{\pi}{\mu})e^{-t\mu}$

Comme $t \mapsto e^{-t\mu}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. On a bien que P est bornée. d'où $T = \infty$ et on a bien une unique solution globale définie sur $[0, \infty[\times U$.

2.4 Représentation des compartiments du modèle

On réalise le schéma du système (2) :

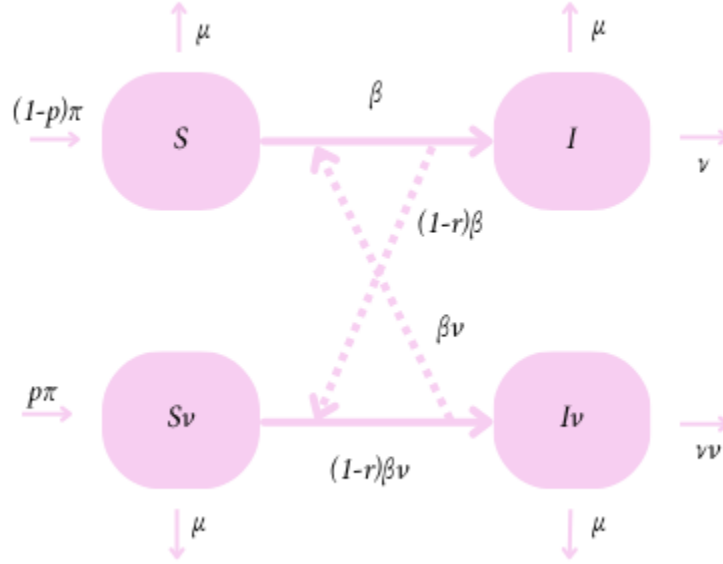


FIGURE 1 – Schéma compartimental du système

Indication de lecture du schéma : Un infecté vacciné transmet à un susceptible au taux β_v par unité de temps. Soit β le taux de transmission par unité de temps d'un infecté, un susceptible vacciné étant protégé par la vaccination il a un risque effectif de $(1-r)\beta$ par unité de temps de se retrouver infecté.

2.5 Recherche d'un équilibre sain

Définition :

Un équilibre sain est un point d'équilibre du système tel que la population est uniquement constituée de susceptibles autrement dit le nombre d'infectés est réduit à 0.

Pour trouver un point d'équilibre sain, nous posons $I=0$ et $I_v=0$ et nous obtenons le nouveau système à partir de (2) :

$$\begin{cases} S' = (1-p)\pi - \mu S \\ S'_v = p\pi - \mu S_v \\ I' = 0 \\ I'_v = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons maintenant un point d'équilibre donc nous posons $S' = 0$, $S'_v = 0$, $I'_v = 0$ et $I_v = 0$

et ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} S = \frac{(1-p)\pi}{\mu} \\ S_v = \frac{p\pi}{\mu} \\ I = 0 \\ I_v = 0 \end{cases}$$

L'équilibre sain du système est appelé DFE (Disease-Free Equilibrium) et noté :

$$DFE := \left(\frac{(1-p)\pi}{\mu}, \frac{p\pi}{\mu}, 0, 0 \right) \quad (4)$$

2.6 Taux de reproduction de base du système

2.6.1 Calcul via la matrice de seconde génération

Définition :

Le taux de reproduction du système noté R_0 est un taux qui permet de calculer l'évolution de l'épidémie. Le seuil est défini à 1 d'où si le taux est supérieur à 1 l'épidémie va se propager et si il est inférieur à 1 l'épidémie va se résorber.

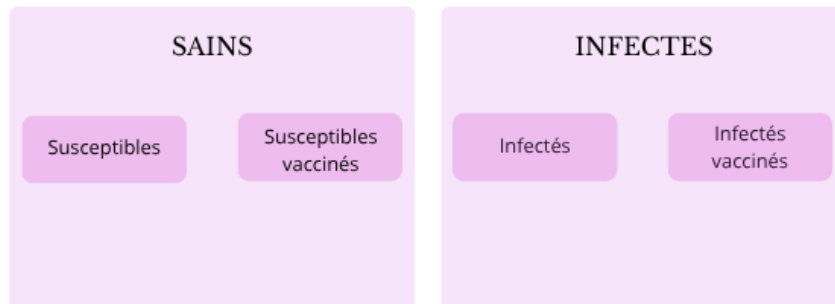
Propriétés :

Au point d'équilibre sain (DFE), si $R_0 < 1$ le système est asymptotiquement localement stable et si $R_0 > 1$ le système est instable.

On divise la population P en 4 compartiments : les susceptibles S , les susceptibles vaccinés S_v , les infectés I et les infectés vaccinés I_v . Chaque compartiment est noté c_i où $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.



On subdivise les compartiments en 2 groupes d'un coté les individus sains et d'un autre les individus malades (y compris ceux ayant les germes de la maladie).



Pour chaque compartiment de 1 à 4, respectivement les susceptibles S , les susceptibles vaccinés S_v , les infectés I et les infectés I_v . On réalise le bilan de flux de chaque compartiment. On regarde les entrées-sorties de chaque compartiment qu'on répartie entre $\mathcal{F}$: les nouveaux entrées infectés, $flux^+$: les nouveaux entrées qui ne sont pas des infectés et $flux^-$ les sorties.

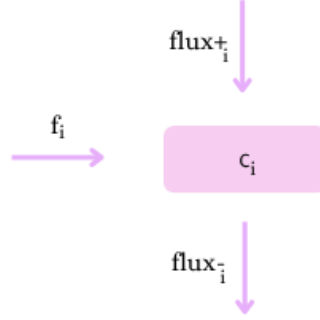


FIGURE 2 – Bilan de flux

On obtient donc d'après (2) les flux suivants pour chacun des compartiments :

c_i	$\mathcal{F}_i$	$flux_i^+$	$flux_i^-$
c_1	0	$(1-p)\pi$	$\mu S + (\beta I + \beta_v I_v)S$
c_2	0	$p\pi$	$\mu S_v + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v$
c_3	$(\beta I + \beta_v I_v)S$	0	$(\mu + \nu)I$
c_4	$(1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v$	0	$(\mu + \nu_v)I_v$

On calcule les matrices $flux^+$, $flux^-$, $\mathcal{F}$ qu'on nomme respectivement J_+ , J_- , $\mathcal{F}$. Ce sont les matrices jacobiniennes des fonctions exprimées dans le tableau.

On a donc par exemple $flux^+ = (flux_1^+, flux_2^+, flux_3^+, flux_4^+) = ((1-p)\pi, p\pi, 0, 0)$. On note $X \in \mathbb{R}^4$ le point auquel on évaluera les matrices jacobiniennes.

Soit les matrices des flux positifs et négatifs :

$$J_+(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_-(X) = \begin{pmatrix} \mu + \beta I + \beta_v I_v & 0 & \beta S & \beta_v S \\ 0 & \mu + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v) & (1-r)S_v\beta & (1-r)\beta_v S_v \\ 0 & 0 & \mu + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \nu_v \end{pmatrix}$$

Soit la matrice des nouveaux entrées infectés :

$$\mathcal{F}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta I + \beta_v I_v & 0 & \beta S & \beta_v S \\ 0 & (1-r)(\beta I + \beta_v I_v) & (1-r)\beta S_v & (1-r)\beta_v S_v \end{pmatrix}$$

Soit A la matrice tel que $A = J_+ - J_-$:

$$A(X) = \begin{pmatrix} -(\mu + \beta I + \beta_v I_v) & 0 & -\beta S & -\beta_v S \\ 0 & -(\mu + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)) & -((1-r)S_v \beta) & -((1-r)\beta_v S_v) \\ 0 & 0 & -(\mu + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu + \nu_v) \end{pmatrix}$$

On évalue $\mathcal{F}$ au DFE trouvé précédemment (4).

$$\mathcal{F}(DFE) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \frac{(1-p)\pi}{\mu} & \beta_v \frac{(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & (1-r)\beta \frac{p\pi}{\mu} & (1-r)\beta_v \frac{p\pi}{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\text{De même, on évalue A au DFE (4) : } A(DFE) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta \frac{(1-p)\pi}{\mu} & -\beta_v \frac{(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & -\mu & -((1-r)\beta \frac{p\pi}{\mu}) & -((1-r)\beta_v \frac{p\pi}{\mu}) \\ 0 & 0 & -(\mu + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu + \nu_v) \end{pmatrix}$$

On prend la sous-matrice 2x2 de $\mathcal{F}$ qu'on nomme F .

$$\text{On obtient donc : } F = \begin{pmatrix} \beta \frac{(1-p)\pi}{\mu} & \beta_v \frac{(1-p)\pi}{\mu} \\ (1-r)\beta \frac{p\pi}{\mu} & (1-r)\beta_v \frac{p\pi}{\mu} \end{pmatrix}$$

On prend une sous matrice 2x2 de A qu'on nomme V.

$$\text{On obtient donc : } V = \begin{pmatrix} -(\mu + \nu) & 0 \\ 0 & -(\mu + \nu_v) \end{pmatrix}$$

On remarque que $V \in GL(2, \mathbb{R})$. En effet, $\det(V) = (\mu + \nu)(\mu + \nu_v)$ donc $\det(V) = 0 \iff (\mu + \nu) = 0$ ou $(\mu + \nu_v) = 0 \iff \mu = -\nu$ ou $\mu = -\nu_v$. On a supposé μ, ν, ν_v positifs donc impossible. V est une matrice de Metzler car les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

De plus, F est une matrice positive car tous les paramètres sont positifs et $r, p \in [0, 1]$ d'où $1 - r \geq 0$ et $1 - p \geq 0$.

Propriété : $R_0 = \rho(-FV^{-1})$

$$\text{Par inversion de la matrice V on obtient } V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-(\mu + \nu_v)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} & 0 \\ 0 & \frac{-(\mu + \nu)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On calcule le produit } FV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta \frac{(1-p)\pi}{\mu} \frac{-(\mu + \nu_v)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} & \beta_v \frac{(1-p)\pi}{\mu} \frac{-(\mu + \nu)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} \\ -(\mu + \nu_v) \frac{-(\mu + \nu_v)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} (1-r)\beta \frac{p\pi}{\mu} & -(\mu + \nu) \frac{-(\mu + \nu)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)} (1-r)\beta_v \frac{p\pi}{\mu} \end{pmatrix}$$

Puis on pose $B = -FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} & \frac{(1-p)\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \\ \frac{(1-r)p\pi\beta(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} & \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \end{pmatrix}$
et c'est cette matrice B qu'on appelle matrice de seconde génération.

On veut à présent calculer le rayon spectral de B , $\rho(B)$. Nous allons utiliser deux méthodes l'une via le déterminant et la trace l'autre via le polynôme caractéristique. Comme B est une matrice 2×2 nous cherchons deux valeurs propres.

$$tr(B) = \frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) + (1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} > 0$$

$$det(B) = \frac{(1-p)\pi^2\beta(\mu+\nu_v)(1-r)p\beta_v(\mu+\nu) - (1-p)\beta_v(\mu+\nu)(1-r)p\pi^2\beta(\mu+\nu_v)}{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2} = 0$$

Donc une valeur propre vaut 0 et comme la trace est positive l'autre valeur propre c'est la trace.

$$\text{Donc } R_0 = \frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) + (1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} = \frac{(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu+\nu)} + \frac{(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu+\nu_v)}$$

On calcule maintenant le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= det(XI_2 - B) = \begin{vmatrix} X - \frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} & -\frac{(1-p)\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \\ -\frac{(1-r)p\pi\beta(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} & X - \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \end{vmatrix} \\ &= (X - \frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}) * (X - \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}) - (\frac{(1-r)p\pi\beta(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)})(\frac{(1-p)\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}) \\ &= X^2 - X\frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} - X\frac{(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} + \frac{(1-r)p\pi^2\beta_v(\mu+\nu)(1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2} - (\frac{(1-p)\pi^2\beta_v(\mu+\nu)(1-r)p\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2}) \\ &= X^2 - X\frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \end{aligned}$$

On calcule le déterminant pour trouver les racines du polynôme caractéristique :

$$\Delta = \frac{((1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v))^2}{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2} = \frac{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu_v)(\mu+\nu)}{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2}$$

$\Delta > 0$ car tous les paramètres sont positifs. On obtient donc les 2 valeurs propres suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v)}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} - \frac{\sqrt{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu_v)(\mu+\nu)}}{2\sqrt{\mu^2(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2}} \\ &= \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) - \sqrt{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu_v)(\mu+\nu)}}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\lambda_2 = \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) + \sqrt{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu_v)(\mu+\nu)}}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}$$

$$D'o\grave{u} \rho(B) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) + \sqrt{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu)(\mu+\nu)}}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}$$

On a donc calculé le taux de reproduction de base du système R_0 :

$$R_0 = \rho(B) = \frac{(1-r)p\pi\beta_v(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta(\mu+\nu_v) + \sqrt{(1-r)^2p^2\pi^2\beta_v^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-r)(1-p)p\pi^2\beta\beta_v(\mu+\nu)(\mu+\nu)}}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}$$

En remplaçant respectivement $\beta, \beta_v, (1-r)\beta, (1-r)\beta_v$ par $\beta_{uu}, \beta_{uv}, \beta_{vu}, \beta_{vv}$. On réécrit R_0 pour simplifier les notations et on obtient :

$$R_0 = \frac{p\pi\beta_{vv}(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta_{uu}(\mu+\nu_v) + \sqrt{\beta_{vv}^2p^2\pi^2(\mu+\nu)^2 + (1-p)^2\pi^2\beta_{uu}^2(\mu+\nu_v)^2 + 2(1-p)p\pi^2\beta_{vu}\beta_{uv}(\mu+\nu)(\mu+\nu)}}{2\mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)}$$

2.6.2 Conditions équivalentes à $R_0 < 1$

Cherchons maintenant une paire de conditions équivalentes à $R_0 < 1$.

Définition :

Soit $M \in \mathbb{Z}^{2,2}$ ie $(a_{i,j}) \leq 0$ si $i \neq j$. On a M est M-matrice non singulière $\iff M = sI - B$ où B positive et $s > \rho(B)$.

Propriété Peron-Frobenius :

Une M-matrice non singulière a ses éléments diagonaux positifs.

Propriété Minkowski :

Si $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$ tel que toutes les sommes de ses lignes sont positives alors $\det(A) > 0$.

On veut regarder $R_0 < 1$ autrement dit $\rho(B) < 1$ donc on pose $s = 1$ et on regarde $M = I - B$ avec B à termes positifs. On obtient alors :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-p)\pi\beta_v}{\mu(\mu+\nu)} & -\frac{(1-p)\pi\beta_v}{\mu(\mu+\nu_v)} \\ -\frac{(1-r)p\pi\beta}{\mu(\mu+\nu)} & 1 - \frac{(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu+\nu_v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} & -\frac{(1-p)\pi\beta_{uv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \\ -\frac{p\pi\beta_{vu}}{\mu(\mu+\nu)} & 1 - \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \end{pmatrix}$$

On a donc l'équivalence suivante $R_0 < 1 \iff M$ est une M-matrice non singulière. Par les propriétés de Minkowski et de Peron-Frobenius on a donc :

$$R_0 < 1 \iff \begin{cases} 1 - \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} > 0 \\ 1 - \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} > 0 \\ \det(M) > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 > \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \\ 1 + \frac{-p\pi\beta_{vv}\mu(\mu+\nu) - (1-p)\pi\beta_{uu}\mu(\mu+\nu_v) + (1-p)p\pi^2\beta_{uu}\beta_{vv} - (1-p)p\pi^2\beta_{uv}\beta_{vu}}{\mu^2(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 > \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}\mu(\mu+\nu) + (1-p)\pi\beta_{uu}\mu(\mu+\nu_v) + (1-p)p\pi^2(\beta_{uv}\beta_{vu} - \beta_{uu}\beta_{vv})}{\mu^2(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)} \end{cases}$$

On a que $\beta_{uv}\beta_{vu} - \beta_{uu}\beta_{vv} = 0$ d'où

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 > \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} + \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} \end{cases}$$

Mais $R_0 = \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} + \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)}$ donc on garde les 2 conditions suivantes :

$$R_0 < 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 > \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} \\ 1 > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} \end{cases} \quad (5)$$

2.7 Analyse de la stabilité

2.7.1 Stabilité locale de l'équilibre sain

Définition :

Un point d'équilibre est dit asymptotiquement stable si pour une valeur initiale proche du point d'équilibre, on a la convergence vers le point d'équilibre.

Théorème :

- Si $R_0 < 1$, le DFE est le seul état stable du système et est localement asymptotiquement stable.
- Si $R_0 > 1$, le DFE est instable et le point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.

Soit la jacobienne associée au système (2) :

$$J(S, S_v, I, I_v) = \begin{pmatrix} -(\mu + \beta I + \beta_v I_v) & 0 & -\beta S & -\beta_v S \\ 0 & -(\mu + (1-r)(\beta I + \beta_v I_v)) & -(1-r)\beta S_v & -(1-r)\beta_v S_v \\ \beta I + \beta_v I_v & 0 & \beta S - (\mu + \nu) & \beta_v S \\ 0 & (1-r)(\beta I + \beta_v I_v) & (1-r)\beta S_v & (1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v) \end{pmatrix}$$

On évalue au DFE et on obtient :

$$J(S^*, S_v^*, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} & -\frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & -\mu & -\frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & -\frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} - (\mu + \nu) & \frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & \frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} - (\mu + \nu_v) \end{pmatrix}$$

On veut connaître le signe des valeurs propres pour en déduire la stabilité locale ainsi, on cherche à trouver λ .

$$\begin{aligned}
\det(J(DFE) - \lambda I_4) &= \det \left(\begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} & -\frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & -\mu & -\frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & -\frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} - (\mu + \nu) & \frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & \frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} - (\mu + \nu_v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} -(\mu + \lambda) & 0 & -\frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} & -\frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & -(\mu + \lambda) & -\frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & -\frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{\beta(1-p)\pi}{\mu} - (\mu + \nu + \lambda) & \frac{\beta_v(1-p)\pi}{\mu} \\ 0 & 0 & \frac{(1-r)\beta p\pi}{\mu} & \frac{(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} - (\mu + \nu_v + \lambda) \end{vmatrix} \\
\det(J(DFE) - \lambda I_4) = 0 &\iff (\mu + \lambda)^2 \left(-\frac{(\mu + \nu_v + \lambda)\beta(1-p)\pi + (\mu + \nu + \lambda)(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} + (\mu + \nu + \lambda)(\mu + \nu_v + \lambda) \right) = 0 \\
0 &\iff \lambda_{1,2} = -\mu \text{ ou } -\frac{(\mu + \nu_v + \lambda)\beta(1-p)\pi + (\mu + \nu + \lambda)(1-r)\beta_v p\pi}{\mu} + (\mu + \nu + \lambda)(\mu + \nu_v + \lambda) = 0 \\
&\iff \lambda^2 + \lambda(2\mu + \nu + \nu_v - \frac{\beta(1-p)\pi + (1-r)\beta_v p\pi}{\mu}) + (\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(1 - R_0) = 0
\end{aligned}$$

On a déjà montré que 2 des valeurs propres sont négatives on cherche maintenant le signe de λ_3 et λ_4 . On veut montrer que les racines sont négatives par la méthode de Routh ainsi on doit regarder $(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(1 - R_0) > 0$ et $2\mu + \nu + \nu_v - \frac{\beta(1-p)\pi + (1-r)\beta_v p\pi}{\mu} > 0$. Comme on est au DFE, $R_0 < 1$ donc $(\mu + \nu_v)(1 - R_0) > 0$. Montrons maintenant l'autre condition. $2\mu + \nu + \nu_v - \frac{\beta(1-p)\pi + (1-r)\beta_v p\pi}{\mu} > 0 \iff 2\mu + \nu + \nu_v > \frac{\beta(1-p)\pi + (1-r)\beta_v p\pi}{\mu}$. On a par le système résolu (5) que $\mu + \nu > \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu}$ et $\mu + \nu_v > \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu}$ d'où en additionnant on trouve $2\mu + \nu + \nu_v > \frac{\beta(1-p)\pi + (1-r)\beta_v p\pi}{\mu}$. On a bien prouvé que toutes les valeurs propres sont négatives d'où le DFE est localement asymptotiquement stable si $R_0 < 1$.

Si $R_0 > 1$ alors $(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(1 - R_0) < 0$ d'où le point d'équilibre sain est instable.

2.7.2 Stabilité globale de l'équilibre sain

Le système (2) étant autonome, on peut chercher une fonction de Lyapunov pour étudier la stabilité au DFE.

Théorème :

- Si $R_0 < 1$, l'état stationnaire sain est globalement asymptotiquement stable pour le système.
- Si $R_0 > 1$, l'état stationnaire endémique est globalement asymptotiquement stable.

Définition d'une fonction de Lyapunov :

Considérons le système autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 . Soit $x_e \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre, c'est-à-dire

$$f(x_e) = 0.$$

Une fonction $L : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , est appelée une *fonction de Lyapunov* au voisinage de x_e si elle satisfait les propriétés suivantes :

1. $L(x_e) = 0$;
2. $L(x) > 0$ pour tout $x \neq x_e$ dans Ω (définie positive) ;
3. Sa dérivée le long des trajectoires du système vérifie

$$\dot{L}(x) = \nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Si, de plus,

$$\dot{L}(x) < 0, \quad \forall x \neq x_e,$$

alors L est appelée une *fonction de Lyapunov stricte*.

Théorème :

Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre du système.

- Si $\dot{L}(\bar{x}) = 0$ et $\dot{L}(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$ alors $\bar{x}$ est stable pour le système.
- Si $\dot{L}$ est définie négative ($\dot{L}(\bar{x}) = 0$ et $\dot{L}(x) < 0, \forall x \neq \bar{x}$) alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.

Notation : On note $\dot{x}$ la dérivée de la variable x par rapport au temps t .

On cherche à présent une fonction de Lyapunov pour notre problème et on la cherche sous la forme $I + f_0 I_v$.

On évalue cette fonction au DFE (4) et on trouve : $L(I^*, I_v^*) = 0$

Pour que L soit une fonction de Lyapunov, il faut que L soit définie positive donc $I + f_0 I_v > 0, \forall I, I_v \neq 0$ ainsi on pose en amont $f_0 \geq 0$.

Maintenant, on cherche à montrer que $\dot{L}$ est négative.

$$\dot{L}(I, I_v) = I' + f_0 I_v' = (\beta I + \beta_v I_v)S - (\mu + \nu)I + f_0((1-r)(\beta I + \beta_v I_v)S_v - (\mu + \nu_v)I_v)$$

On évalue au DFE (4) et on trouve : $\dot{L}(I^*, I_v^*) = 0$.

On montre que L est décroissante ou strictement décroissante.

On rassemble I et I_v :

$$\dot{L}(I, I_v) = I(\beta S - (\mu + \nu) + f_0(1-r)\beta S_v) + I_v(\beta_v S + f_0(1-r)\beta_v S_v - f_0(\mu + \nu_v))$$

On va poser f_0 pour enlever une variable afin d'obtenir une équation avec une inconnue. On choisit d'enlever I_v ainsi on veut que $\beta_v S + f_0(1-r)\beta_v S_v - f_0(\mu + \nu_v) = 0$ d'où $\beta_v S + f_0((1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v)) = 0$ et donc on pose $f_0 = \frac{-\beta_v S}{(1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v)}$.

On a posé la condition $f_0 \geq 0$ pour que L soit définie positive ainsi comme $-\beta_v S \leq 0$, on doit avoir $(1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v) < 0 \iff (1-r)\beta_v S_v < (\mu + \nu_v) \iff \beta_{vv} S_v < (\mu + \nu_v)$.

On remplace f_0 dans $\dot{L}$ et on obtient :

$$\dot{L}(I, I_v) = I(\beta S - (\mu + \nu) + \frac{-\beta_v S(1-r)\beta S_v}{(1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v)}) = I(\frac{-\beta S(\mu + \nu_v) - (1-r)\beta_v S_v(\mu + \nu) + (\mu + \nu)(\mu + \nu_v)}{(1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v)})$$

On veut essayer de faire apparaître $R_0 - 1$ car on sait qu'à l'équilibre sain $R_0 < 1$ donc on cherche à factoriser $R_0 - 1$ avec un terme positif pour avoir la décroissance.

$$\text{On se rappelle que } R_0 = \frac{(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu + \nu)} + \frac{(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu + \nu_v)}.$$

On veut faire apparaître $R_0 - 1$ donc on essaye par identification :

$$(R_0 - 1)(aI + b) = I(\frac{a(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu + \nu)} + \frac{a(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu + \nu_v)} - a) + b(\frac{(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu + \nu)} + \frac{(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu + \nu_v)} - 1)$$

Donc en identifiant on trouve :

$$I(\frac{a(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu + \nu)} + \frac{a(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu + \nu_v)} - a) = I(\frac{-\beta S(\mu + \nu_v) - (1-r)\beta_v S_v(\mu + \nu) + (\mu + \nu)(\mu + \nu_v)}{(1-r)\beta_v S_v - (\mu + \nu_v)}) \text{ et } b(\frac{(1-p)\pi\beta}{\mu(\mu + \nu)} + \frac{(1-r)p\pi\beta_v}{\mu(\mu + \nu_v)} - 1) = 0 \iff b(R_0 - 1) = 0 \text{ ainsi } b = 0 \text{ car } R_0 < 1.$$

On détermine a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(-\beta S\mu(\mu + \nu_v) - (1-r)S_v\beta_v\mu(\mu + \nu) + \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v))}{(\mu + \nu_v)((1-r)(1-p)\pi\beta\beta_v S_v - (1-p)\pi\beta(\mu + \nu_v) - (1-r)p\pi\beta_v(\mu + \nu) - \mu(1-r)\beta_v S_v(\mu + \nu) + \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)) + (1-r)^2 p\pi\beta_v^2 S_v(\mu + \nu)} \\ &= \frac{(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(-\beta_{uu}S\mu(\mu + \nu_v) - S_v\beta_{vv}\mu(\mu + \nu) + \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v))}{(\mu + \nu_v)((1-p)\pi\beta_{uu}\beta_{vv}S_v - (1-p)\pi\beta_{uu}(\mu + \nu_v) - p\pi\beta_{vv}(\mu + \nu) - \mu\beta_{vv}S_v(\mu + \nu) + \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)) + p\pi\beta_{vv}^2 S_v(\mu + \nu)} \\ &= \frac{\mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)(-\beta_{uu}S(\mu + \nu_v) - S_v\beta_{vv}(\mu + \nu) + (\mu + \nu)(\mu + \nu_v))}{(\mu + \nu_v)((1-p)\pi\beta_{uu}(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v)) + \mu(\mu + \nu)(-\beta_{vv}S_v + (\mu + \nu_v))) + p\pi\beta_{vv}(\mu + \nu)(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v))} \end{aligned}$$

On a donc $\dot{L} = (R_0 - 1)aI$ ainsi il suffit de montrer que $a \geq 0$ pour avoir la décroissance de L.

On commence par étudier le dénominateur de a :

$$\begin{aligned} &(\mu + \nu_v)(1-p)\pi\beta_{uu}(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v)) - (\mu + \nu)(\mu + \nu_v)\mu(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v)) + \pi p\beta_{vv}(\mu + \nu)(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v)) \\ &= (\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v))((\mu + \nu_v)(1-p)\pi\beta_{uu} + \pi p\beta_{vv}(\mu + \nu) - \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)) \\ &= (\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v))(\pi((\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)) - \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)) \end{aligned}$$

D'après la condition posée pour que $f_0 \geq 0$ on a : $\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v) < 0$.

Ainsi, on étudie le signe de $\pi((\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)) - \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)$ qui est une fonction en π donc on a $\pi_0 = \frac{\mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)}{(\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)}$.

Comme $-\mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v) < 0$ on a si $\pi < \pi_0$ alors l'équation est négative mais comme $\pi < \frac{\mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)}{(\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)}$ se réécrit $R_0 < 1$. On a que cette condition est toujours vrai pour avoir la stabilité locale de l'équilibre sain donc $\pi((\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)) - \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v) < 0$.

Comme $\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v) < 0$ alors $(\beta_{vv}S_v - (\mu + \nu_v))(\pi((\mu + \nu_v)(1-p)\beta_{uu} + p\beta_{vv}(\mu + \nu)) - \mu(\mu + \nu)(\mu + \nu_v)) \geq 0$

On étudie maintenant le numérateur de a : $-\mu(\mu + \nu)^2(\mu + \nu_v)^2(\frac{\beta_{uu}S}{\mu + \nu} + \frac{S_v\beta_{vv}}{\mu + \nu_v} - 1)$

Comme $-\mu(\mu + \nu)^2(\mu + \nu_v)^2 < 0$, on regarde le signe de $\frac{\beta_{uu}S}{\mu + \nu} + \frac{S_v\beta_{vv}}{\mu + \nu_v} - 1$.

A l'équilibre sain, on a les inégalités suivantes : $S \leq S^*$ et $S_v \leq S_v^*$.

On va donc majorer notre numérateur tel que :

$$\frac{\beta_{uu}S}{\mu+\nu} + \frac{S_v\beta_{vv}}{\mu+\nu_v} - 1 \leq \frac{(1-p)\pi\beta_{uu}}{\mu(\mu+\nu)} + \frac{p\pi\beta_{vv}}{\mu(\mu+\nu_v)} - 1 = R_0 - 1$$

Comme on est à l'équilibre sain, on a $R_0 < 1$ donc $R_0 - 1 < 0$ et par majoration on a $\frac{\beta_{uu}S}{\mu+\nu} + \frac{S_v\beta_{vv}}{\mu+\nu_v} - 1 \leq 0$.

On obtient alors $-\mu(\mu+\nu)^2(\mu+\nu_v)^2(\frac{\beta_{uu}S}{\mu+\nu} + \frac{S_v\beta_{vv}}{\mu+\nu_v} - 1) \geq 0$. Donc on conclut que $a \geq 0$. Par suite, $aI \geq 0$ et $R_0 - 1 \leq 0$ d'où $\dot{L} = (R_0 - 1)aI \leq 0$. L est une fonction de Lyapunov.

On veut maintenant étudier si la fonction est négative ou définie négative afin d'appliquer le théorème de stabilité. En dehors de l'équilibre sain, on a $\dot{L} = 0 \iff (R_0 - 1)aI = 0 \iff I = 0$ ou $a = 0$ ou $R_0 = 1$ mais $R_0 \neq 1$ au DFE, $I \neq 0$ au DFE donc on regarde si $a = 0$ est possible.

$$a = 0 \iff \mu(\mu+\nu)(\mu+\nu_v)(-\beta_{uu}S(\mu+\nu_v) - S_v\beta_{vv}(\mu+\nu) + (\mu+\nu)(\mu+\nu_v)) = 0 \iff -\beta_{uu}S(\mu+\nu_v) - S_v\beta_{vv}(\mu+\nu) + (\mu+\nu)(\mu+\nu_v) = 0 \iff \beta_{uu}S(\mu+\nu_v) + S_v\beta_{vv}(\mu+\nu) = (\mu+\nu)(\mu+\nu_v) \iff \frac{\beta_{uu}S}{\mu+\nu} + \frac{\beta_{vv}S_v}{\mu+\nu_v} = 1$$

On est à l'équilibre sain donc on peut utiliser la majoration $S \leq S^*$ et $S_v \leq S_v^* : 1 = \frac{\beta_{uu}S}{\mu+\nu} + \frac{\beta_{vv}S_v}{\mu+\nu_v} \leq \frac{\beta_{uu}(1-p)\pi}{\mu(\mu+\nu)} + \frac{\beta_{vv}p\pi}{\mu(\mu+\nu_v)} = R_0 < 1$. On a donc une contradiction. Ainsi, L est définie négative.

D'après le théorème de Lyapunov, le DFE est globalement asymptotiquement stable pour le système.

2.8 Application numérique

On cherche un ensemble de paramètres pour pouvoir illustrer notre système. On choisit des paramètres qui paraissent réalistes et qui pourront nous donner des observations intéressantes. On pose tout d'abord que le vaccin a un taux d'efficacité supérieur à 50 % afin que la vaccination ait un intérêt. On supposera que le vaccin limite le taux d'infection mais qu'il a également un impact sur le taux de transmission et de guérison. On cherche à ce que les individus ne sortent pas trop rapidement du système donc il faut avoir un taux bas de mortalité et de guérison. On prend un taux de guérison plus rapide pour les personnes vaccinées. Pour ne pas que le système devienne incontrôlable à cause d'un trop gros taux de transmission, on choisit un taux très faible et on diminue ce taux pour les vaccinés. On veut trouver un ensemble de paramètres tel qu'en changeant uniquement la probabilité d'être vacciné on puisse avoir 2 situations d'épidémie différentes à étudier. En effet, on cherche à pouvoir montrer aux pouvoirs publics sur quel paramètre il sera possible d'agir pour modifier les cours de l'épidémie. Dans le système étudié, le seul paramètre qu'il sera possible aisément de modifier sera la probabilité de vaccination tous les autres paramètres seront plus difficiles à moduler. On finit par choisir le taux de recrutement de façon à ce que notre système marche et dans notre cas cela signifie qu'il y a peu d'entrant.

On choisit donc l'ensemble de paramètres suivant :

β	0.03
β_v	0.01
μ	0.1
ν	0.15
ν_v	0.3
r	0.6
π	3

Interprétation : On a 3 nouveaux individus par unité de temps, une durée de vie moyenne de 10 unités de temps et 3 unités de temps de guérison quand on est vacciné.

On choisit d'agir sur p la probabilité de vaccination pour faire évoluer R_0 donc on choisit $p = 0.3$ pour $R_0 > 1$ et $p = 0.8$ pour $R_0 < 1$.

On choisit d'évaluer notre graphique sur 250 unités de temps pour avoir une vision d'ensemble de l'évolution de l'épidémie et sur 3000 unités de temps pour pouvoir visualiser correctement la convergence sur les portraits de phases. Pour les conditions initiales on choisit plusieurs conditions proches et lointaines pour visualiser la stabilité des équilibres.

2.8.1 Cas où $R_0 < 1$

Dans cette section, on a choisi $p = 0.8$ pour obtenir $R_0 < 1$. Le DFE est globalement asymptotiquement stable et égale à $(6, 24, 0, 0)$.

On réalise l'évolution en unités de temps de notre système pour des conditions plus ou moins proches du DFE. On observe bien la stabilité du DFE donc que les conditions initiales vont converger vers le point d'équilibre sain.

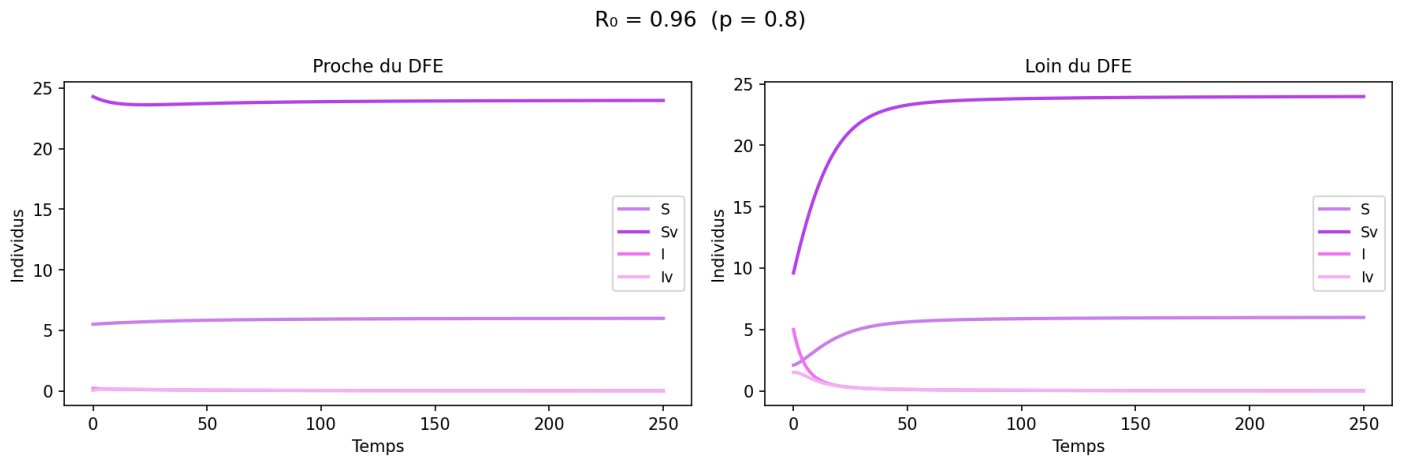


FIGURE 3 – Evolution du système pour $R_0 < 1$

On réalise maintenant les portraits de phase pour cette condition. On choisit de regarder les infectés

par rapport aux susceptibles puis les infectés vaccinés par rapport aux susceptibles vaccinés. On visualise bien que pour n'importe quelle condition initiale on aura la convergence vers le point d'équilibre sain.

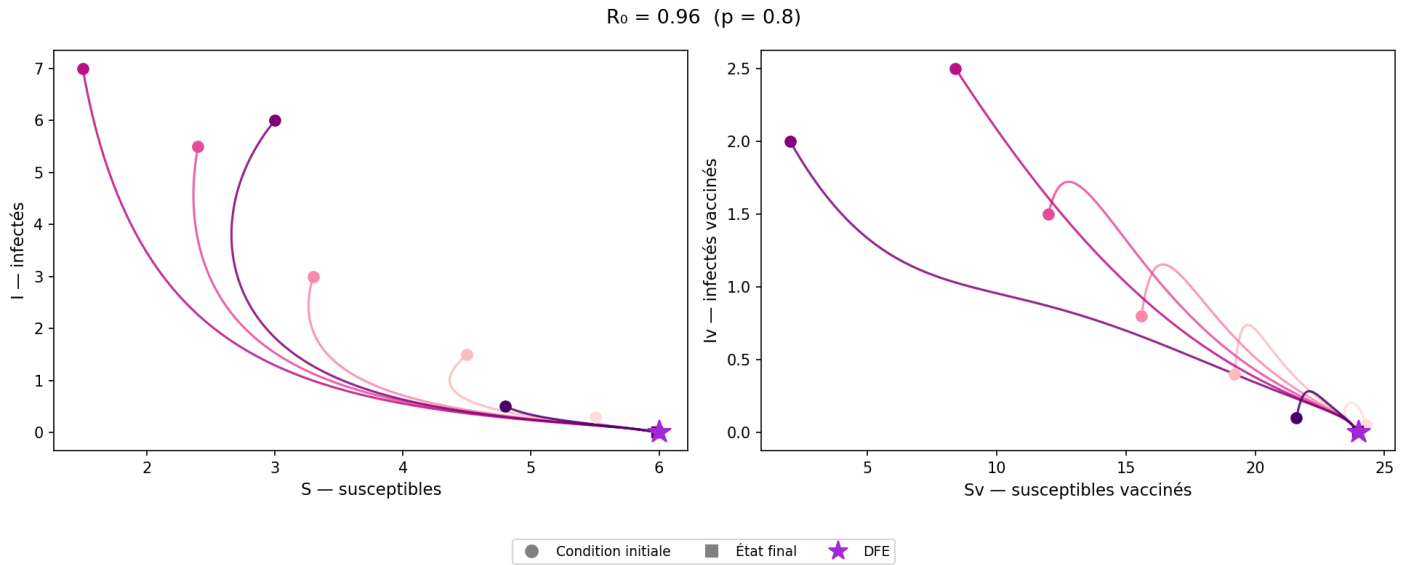


FIGURE 4 – Portraits de phase pour $R_0 < 1$

2.8.2 Cas où $R_0 > 1$

On choisit maintenant $p = 0.3$ pour que $R_0 > 1$. Dans cette situation le DFE est instable et égale à $(21, 9, 0, 0)$. On va donc étudier l'équilibre endémique.

On voit sur les graphiques que les individus infectés ne sont pas réduits à 0 et que les conditions initiales proche ou lointaine de l'équilibre sain ne mène pas à la convergence à cause de l'instabilité du point pour ces paramètres. On remarque tout de même que les courbes se stabilisent à partir d'un certain point.

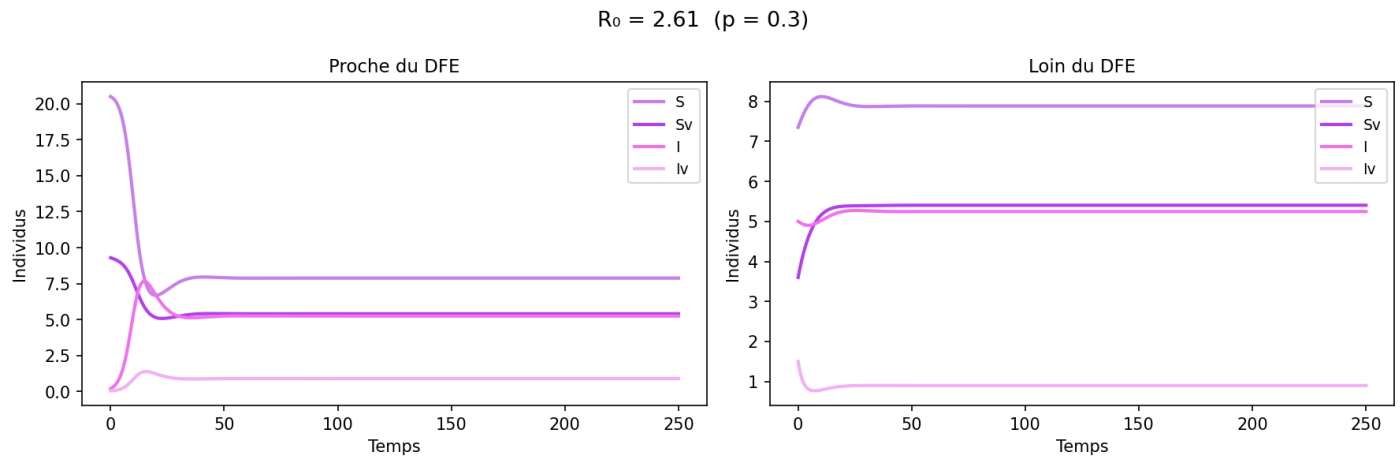


FIGURE 5 – Evolution du système pour $R_0 > 1$

On choisit d'observer les mêmes ensembles que précédemment pour les portraits de phase. On voit bien qu'aucune condition initiale ne converge vers le point d'équilibre sain mais qu'en revanche toutes convergent vers un point. Comme on sait qu'un point d'équilibre endémique est asymptotiquement stable pour le système quand $R_0 > 1$ alors ce point de convergence devient notre équilibre endémique.

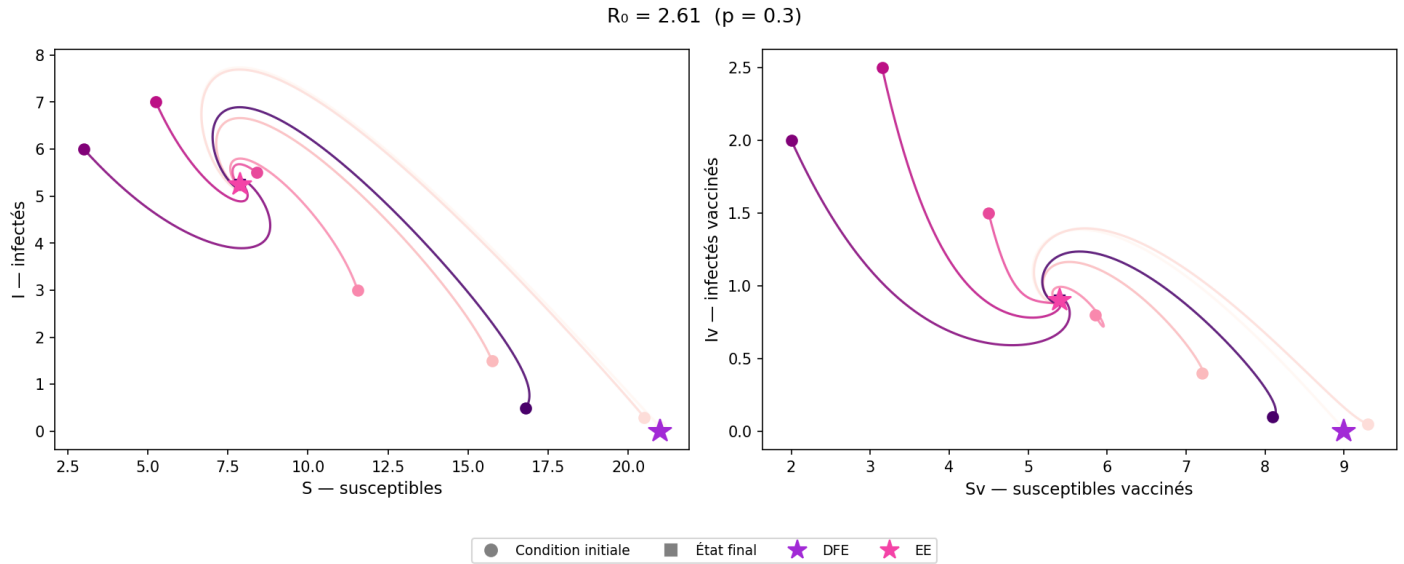


FIGURE 6 – Portraits de phase pour $R_0 > 1$

3 Bibliographie

L. M. Tine, Cours d'épidémiologie, Modélisation, Département de Mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1.

E. Fouassier, Équations différentielles, Département de mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1.

R.J. Plemmons, Linear algebra and its applications, M-matrix characterizations, I.nonsingular M-matrices, Vol.18 (1977), p.175-188.

A. Ghodbane, R. Merouani, Stabilité locale et stabilité globale d'un modèle épidémique de diffusion à incidence non linéaire (2022).

S. Arfa, E. M. Barhoumi, Cours systèmes asservis linéaires continues, Chapitre 3 : Stabilité des systèmes linéaires, ISET Kairouan-Tunisie.