

Théorème d'unicité faible pour l'équation d'Euler incompressible en dimension 2 à tourbillon borné

Kylian Boyet

Stage de recherche en L3 sous la direction de : M. Iftimie Dragoş

Université Claude Bernard Lyon 1
43 Boulevard du 11 novembre 1918, Villeurbanne

3 juillet 2026

Résumé

Dans ce rapport, j'étudie la théorie des intégrales singulières suivant le livre de Stein (Stein, [1]) devenu une référence en la matière. Cette étude faite, on applique cette théorie en démontrant un résultat dû à Yudovich en 1963 sur l'unicité des solutions faibles de l'équation d'Euler 2-dimensionnelle pour les fluides incompressibles à tourbillon borné. On expose dans un premier temps les résultats éventuellement en admettant certains points, puis une visite de l'annexe pourra probablement justifier les passages laissés de côté. Cette approche permet à un étudiant de Licence 3 de lire ce rapport avec l'essentiel des informations, et l'étudiant motivé pourra y trouver son compte en examinant la fin de rapport.

Table des matières

Notations	3
1 Éléments de théorie des intégrales singulières	4
1.1 L'idée de fonction maximale	4
1.2 Ensemble de Lebesgue et intégrale de Marcinkiewicz	9
1.3 Décompositions en cubes	12
1.4 Taille relative et interpolation	16
1.5 Transformée de Fourier L^2	17
1.6 Théorème d'interpolation pour les opérateurs singuliers	18
1.7 Variantes du théorème	22
2 Application à la mécanique des fluides	29
2.1 Les équations d'Euler et l'équation de conservation	29
2.2 Interprétation de l'équation évolutive	30
2.3 Loi de Biot-Savart pour le champ des vitesses	32
2.4 Formulation faible du problème (partie avancée)	33
2.5 Preuve du Théorème de Yudovich	35
A Distributions	39
A.1 Fonctions tests	39
A.2 Distributions	39
A.3 Opérations sur les Distributions	41
B Éléments de Géométrie Différentielle	42
B.1 Les tenseurs	42
B.2 Les formes différentielles	44
B.3 Le lemme de Poincaré	46
B.4 Calculs sur des chaînes	48
B.5 Calcul sur des variétés	49
B.6 Applications	49
Bibliographie	51

Notations

χ_A	Indicatrice de l'ensemble A
$m(A)$	Mesure de l'ensemble A
${}^c A$	Complémentaire de l'ensemble A
dx	Mesure de Lebesgue pour la dimension du contexte
$\int$	Intégrale de Lebesgue
$PV \int$	Valeur principale de l'intégrale ci-contre
$\overline{\lim}$	Limite supérieure
$\underline{\lim}$	Limite inférieure
$\binom{n}{k}$	Coefficient binomial k parmi n
$\amalg$	Union disjointe
$\Delta(Q)$	Diamètre du cube Q
$\bar{f}$	Intégrale moyennée
$\langle, \rangle$	Crochet de dualité
$\lesssim$	Majoration à constante près
$\nabla \cdot F$	Divergence de F
$\nabla \times F$	Rotationnel de F
∇f	Gradient de f
$\triangleq$	Par définition
C_0^1	Fonctions de classe C^1 à support compact
$d(A, B)$	Distance entre les ensembles A et B
D_i	Dérivée selon le i^e vecteur de la base canonique
$x \times y$	Produit vectoriel de x et y
$x \cdot y$	Produit scalaire de x contre y

1 Éléments de théorie des intégrales singulières

Je suis, tout le long de cette section, le livre de Stein, devenu une référence en la matière (*cf* Stein, [1]).

Pour commencer ce chapitre, on rappelle des éléments de théorie des fonctions à variables réelles pour ensuite continuer avec le sujet principal de cette partie.

On notera par dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ seront vus par rapport à cette mesure. Pour un ensemble E on notera cE son complémentaire.

1.1 L'idée de fonction maximale

On présente ici un outil d'analyse pertinent, dont l'utilisation sera majeure dans ce chapitre. Le but est le suivant, on souhaite étudier la limite suivante :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B(x,r)} f(y) dy,$$

intuitivement, puisqu'il s'agit de la moyenne de f autour de x , si l'on réduit assez le rayon de la boule considérée on devrait obtenir une valeur proche de $f(x)$, on s'attend alors que sous de bonnes hypothèses sur x et f , cette limite donne $f(x)$. Pour "simplifier" l'étude de cette limite on considère son "équivalent qualitatif" la *fonction maximale* :

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \oint |f(y)| dy,$$

cette quantité peut bien sûr diverger. On notera que l'opérateur M se concentre sur la taille de f et non pas sur son signe (on ne considère pas les éventuels phénomènes d'annulation au sein de l'intégrale), il est donc nécessaire de formuler une notion de "taille relative" pour f , pour ce faire on introduit l'ensemble suivant pour $\alpha > 0$:

$$\{|f| > \alpha\},$$

en prenant la mesure de cet ensemble on obtient la notion désirée, on notera $\lambda(\alpha)$ cette mesure. On appelle λ la fonction de distribution de f . Pour valider cette notion, on remarquera par exemple que λ décroît lorsque α augmente et inversement lorsque α diminue. Ainsi, dans le premier cas on décrit la grandeur relative de f et dans le second cas, la relative petitesse de f "à l'infini".

Par ailleurs, pour f intégrable on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \geq \int_{|f|>\alpha} |f| \geq \alpha \lambda(\alpha),$$

d'où l'on tire une première estimation de λ . On a pour la notion de fonction maximale le premier théorème suivant :

Théorème 3.1.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$.

- a) Si f est L^p pour $1 \leq p \leq \infty$, alors Mf est finie presque partout.
b) Si f est intégrable, alors pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$m\{Mf > \alpha\} \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

où A est une constante qui ne dépend que la dimension n ($A = 5^n$ convient)

- c) Si f est L^p pour $1 < p \leq \infty$, alors Mf l'est aussi et on a :

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p},$$

où A_p ne dépend que de n et p .

Corollaire 3.1.1. Si f est L^p pour $1 \leq p \leq \infty$, ou plus généralement si f est localement intégrable, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x),$$

pour presque tout x .

Pour démontrer ces résultats nous aurons besoin d'un lemme de recouvrement de type "Vitali" :

Lemme 3.1.1. Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ recouvert par une famille de boules $\{B_j\}$ de diamètres bornés. Alors de cette famille on peut extraire une sous-famille de boules disjointes, $B_1, \dots, B_k, \dots$, (éventuellement infinie) telle que :

$$\sum_k m(B_k) \geq C m(E),$$

où C est une constante positive ne dépendant que de n ($C = 5^{-n}$ convient).

Preuve du Lemme 3.1.1. : L'idée est de sélectionner les boules "principales" du recouvrement, puis d'en augmenter suffisamment la taille pour encore recouvrir E .

Pour faire ce choix on prend à chaque étape la boule "la plus grande possible". Ainsi, on choisit (il n'y a pas nécessairement unicité, mais cela n'a pas d'importance) B_1 telle que $\text{diam } B_1 \geq \frac{1}{2} \sup\{\text{diam } B_j\}$. On suppose avoir choisi $B_1, \dots, B_k$. On choisit B_{k+1} telle que son $\text{diam } B_{k+1} \geq \frac{1}{2} \sup\{\text{diam } B_j : B_j \text{ disjoint de } B_1, \dots, B_k\}$. Bien sûr, la famille est finie si le choix ne peut pas être fait, *i.e.* si l'on ne peut pas trouver une boule non disjointe de celles précédemment choisies. Par suite, deux cas se distinguent, si la somme des mesures est finie ou infinie. Le second cas est alors immédiat. Supposons la somme finie. On note $\{B_k^*\}$ la famille des boules nouvellement choisies dont le diamètre a été multiplié par 5. J'affirme que :

$$E \subset \bigcup_k B_k^*.$$

Il suffit de montrer que toutes les boules de la première famille sont incluses dans cette union. Notons que si la famille des boules que nous avons choisies est finie,

alors l'inclusion de toute boule est immédiate vu notre procédé de sélection (pour la famille, être finie signifiait qu'il n'existait plus de boule satisfaisant la condition d'intersection vide...), aussi peut-on supposer la famille sélectionnée comme étant infinie. Par la suite on ne considère que les B_j qui ne sont pas dans $\{B_k\}$ sinon il n'y aurait rien à prouver. Soit donc $B_j \notin \{B_k\}$. Comme $\sum_k m(B_k) < \infty$, on a $\lim_k m(B_k) = 0$, *i.e.* $\lim_k \text{diam } B_k = 0$. On considère alors k , le premier indice tel que $\text{diam } B_{k+1} < \frac{1}{2} \text{diam } B_j$. Nécessairement, B_j doit intersecter l'une des k boules précédentes, sinon elle aurait été choisie comme $(k+1)^{\text{e}}$ boule, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Partant, B_j intersecte B_{j_0} pour un $1 \leq j_0 \leq k$. Dès lors, on a $\frac{1}{2} \text{diam } B_j \leq \text{diam } B_{j_0}$. De cette inégalité et du fait que $B_j \cap B_{j_0} \neq \emptyset$, on a $B_j \subset B_{j_0}^*$. D'où le résultat en utilisant l'inégalité de Boole, où $C = 5^{-n}$ convient après division :

$$m(E) \leq \sum_k m(B_k^*) = 5^n \sum_k m(B_k).$$

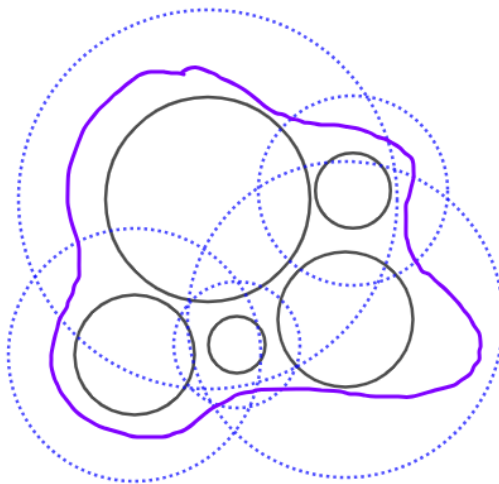


FIGURE 1 – Illustration de l'idée de preuve

Preuve du théorème 3.1.1. On commence par montrer *b)* et le cas $p = 1$ de *a)*. On souhaite étudier la taille relative de Mf , on pose alors

$$E_\alpha = \{Mf > \alpha\},$$

pour un $\alpha > 0$ tel que E_α ne soit pas vide, ce qui est possible si f n'est pas identiquement nulle, si tel est le cas pour f on voit bien que le théorème est en tout point immédiat. On suppose donc f non-identiquement nulle et on prend un tel α . Soit alors $x \in E_\alpha$, on a $Mf(x) > \alpha$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Mf(x) = \alpha + \varepsilon$, puis par définition de $Mf(x)$ et du supremum, on a l'existence d'un $r > 0$ tel que :

$$Mf(x) \geq \int_{B(x,r)} |f(y)| dy > Mf(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha,$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in E_\alpha$, il existe B_x , une boule centrée en x , telle que :

$$\int_{B_x} |f| > \alpha m(B_x),$$

avec en plus :

$$E_\alpha \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_x.$$

On utilise alors le lemme de recouvrement, on note B_k les boules disjointes obtenues via celui-ci, on a grâce à celles-là :

$$5^{-n}m(E_\alpha) \leq \sum_k m(B_k),$$

ainsi :

$$m(E_\alpha) \leq 5^n \sum_k \frac{1}{\alpha} \int_{B_k} |f| \leq \frac{5^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

d'où $A = 5^n$ convient et vu la proportionnalité en α , on a bien Mf finie presque partout pour le cas $p = 1$.

Soit maintenant $1 < p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que le cas $p = \infty$ est immédiat et que $A_\infty = 1$ conviendrait. On prend donc plutôt $1 < p < \infty$. Nous allons maintenant utiliser une technique de découpage selon la taille relative de f , cette technique est extrêmement utile et nous la "formaliserons" plus amplement dans une section prochaine. Ce découpage s'effectue ainsi,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

de telle sorte que, $|f| \leq |f_1| + \frac{\alpha}{2}$, d'où aussi, $Mf \leq Mf_1 + \frac{\alpha}{2}$, ce qui donne :

$$\{Mf > \alpha\} \subset \{Mf_1 > \frac{\alpha}{2}\}.$$

On montre qu'avec f dans L^p on a f_1 dans L^1 :

$$\int |f_1| = \int |f_1|^p |f_1|^{1-p} \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1-p} \int |f|^p < \infty,$$

puisque $1 - p < 0$. Nous nous sommes donc ramenés au cas $p = 1$ pour f_1 , ce qui nous permet d'utiliser le point *b*), ceci en se rappelant de l'inclusion exposée plus haut :

$$m(E_\alpha) \leq m\{Mf_1 > \alpha\} \leq \frac{2A}{\alpha} \|f_1\|_{L^1} = \frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f|. \quad (1)$$

Notons λ la fonction de distribution de Mf . Toutes les fonctions mises en jeu sont mesurables positives, on peut effectuer les calculs suivant dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et, partant, on a d'après Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{Mf(x)} p\alpha^{p-1} d\alpha \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_{Mf > \alpha} p\alpha^{p-1} dx \right) d\alpha,$$

d'où par indépendance de α vis-à-vis de x et par définition de $\lambda(\alpha)$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha.$$

Or, $\lambda(\alpha) = m(E_\alpha)$, d'où encore par Fubini-Tonelli, on peut majorer le membre de droite de cette égalité grâce à (1) par :

$$p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \left(\frac{2A}{\alpha} \int_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)| dx \right) d\alpha = 2Ap \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} |f(x)| d\alpha \right) dx,$$

ce qui donne finalement :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p dx \leq \frac{2Ap}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} (2|f(x)|)^{p-1} |f(x)| dx = \frac{2^p Ap}{p-1} \|f\|_{L^p}^p,$$

c'est-à-dire :

$$\|Mf\|_{L^p} \leq 2 \sqrt[p]{\frac{Ap}{p-1}} \|f\|_{L^p}.$$

Nous venons donc d'obtenir c), pour finir a), il suffit de remarquer que c) donne : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p \leq \infty$, alors $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$, or $(Mf)^p$ est une fonction mesurable positive, donc la finitude de son intégrale implique qu'elle est finie presque partout, puis dès lors, Mf est finie presque partout, c'est la fin de a). On a donc prouvé le théorème 1. De plus, on sait que :

$$A_p \leq 2 \left(\frac{5^n p}{p-1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

ainsi on obtient l'information supplémentaire :

$$\boxed{A_p \underset{p \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{p-1}\right)}.$$

Passons à la preuve du corollaire 3.1.1.

Preuve corollaire 3.1.1. Premièrement, on peut réduire l'étude au cas $p = 1$ simplement en multipliant f par la fonction caractéristique d'une boule, et en recouvrant $\mathbb{R}^n$ par de telles boules. Par suite, posons pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, x dans $\mathbb{R}^n$ et $r > 0$:

$$f_r(x) = \int_{B(x,r)} f(y) dy.$$

Par approximation de l'identité, on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_r - f\|_{L^1} = 0,$$

dès que f est sommable. Par la pseudo-réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il existe une sous-suite (r_k) telle que $f_{r_k} \rightarrow f$ presque partout. Nous définissons l'oscillation de la famille de fonctions (f_r) pour montrer que la limite de $f_r(x)$ quand r tend vers 0 existe presque partout. L'oscillation est définie comme suit :

$$\Omega f(x) = |\overline{\lim} f_r(x) - \underline{\lim} f_r(x)|,$$

dans le cas f continue à support compact, le résultat est trivial. Maintenant, prenons f sommable, on utilise le b) du théorème :

$$m\{x : 2Mf > \varepsilon\} \leq \frac{2A}{\varepsilon} \|f\|_{L^1},$$

or par majorations grossières :

$$\Omega f \leq 2Mf,$$

et alors :

$$m\{x : \Omega f > \varepsilon\} \leq \frac{2A}{\varepsilon} \|f\|_{L^1},$$

par densité, écrivons $f = \phi_\delta + g_\delta$ avec ϕ_δ continue à support compact et g_δ sommable de norme aussi petite que l'on veut, ici δ . Par inégalité triangulaire, $\Omega f \leq \Omega \phi_\delta + \Omega g_\delta = \Omega g_\delta$ et alors :

$$m\{x : \Omega f > \varepsilon\} \leq \frac{2A}{\varepsilon} \|g_\delta\|_{L^1} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

ainsi :

$$m\{x : \Omega f > \varepsilon\} = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. D'où, $\Omega f = 0$ presque partout et en conséquence, la limite étudiée aussi et le corollaire est prouvé.

1.2 Ensemble de Lebesgue et intégrale de Marcinkiewicz

Il nous faut montrer que ce résultat est toujours vrai pour des familles plus larges que des familles de boules, nous aurons besoin, à cet effet, de le montrer sur certaines familles de cubes.

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ est régulière s'il existe une constante $c > 0$ telle que si $S \in \mathcal{F}$ alors pour une boule convenable, B , centrée à l'origine, telle que $S \subset B$, l'on ait $m(S) \geq cm(B)$. Notre intérêt se porte sur les familles de cubes tels que leur distance à l'origine est bornée par un multiple de leur diamètre. C'est un cas particulier de famille régulière. Par analogie, on définit :

$$M_{\mathcal{F}}f(x) = \sup_{S \in \mathcal{F}} \int_S |f(x-y)| dy,$$

pour les familles régulières on a alors :

$$M_{\mathcal{F}}f \leq c^{-1}Mf,$$

ainsi, $M_{\mathcal{F}}$ jouit, à l'instar de M , des conséquences du théorème 1., et par les mêmes arguments que dans la preuve du corollaire 1., on a aussi pour presque tout x :

$$\lim_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ m(S) \rightarrow 0}} \int_S f(x-y) dy = f(x),$$

le résultat précédent est satisfaisant, mais dans la mesure où l'ensemble négligeable sur lequel il n'est plus vrai dépend de la famille, on aimerait qu'il dépende uniquement de f et donc que l'on ait le résultat vrai pour toutes les familles régulières en même temps. C'est l'objectif du complémentaire de l'**ensemble de Lebesgue associé à f** :

$$E^f = \left\{ x : \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)| dy = 0 \right\},$$

pour montrer que cet ensemble est de complémentaire négligeable on remarque que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - c| dy = |f(x) - c|,$$

pour toute constante c , presque partout. Donc il y a E_c^f avec $m(E_c^f) = 0$ et pour lequel la relation ci-dessus est vraie si x est en dehors de cet ensemble. Soit

$c_1, \dots, c_n, \dots$ une énumération des rationnels. Posons $\tilde{E}^f = \cup_i E_{c_i}^f$. De cette manière, on a :

$$\forall x \notin \tilde{E}^f, \forall c \in \mathbb{Q}, \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - c| dy = |f(x) - c|,$$

et par continuité, on a le même résultat pour tout c réel. Ainsi,

$$\boxed{{}^c \tilde{E}^f \subset E^f},$$

et par une majoration immédiate issue de la définition des familles régulières, on obtient, pour toute famille régulière $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\forall x \notin \tilde{E}^f, \lim_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ m(S) \rightarrow 0}} \int_S f(x-y) dy = f(x)}.$$

Passons à l'**intégrale de Marcinkiewicz**. On développe ce point pour faire le lien entre la "régularité géométrique" d'un ensemble mesurable et la théorie des intégrales singulières, cela nous sera utile pour la suite. Il s'agit aussi d'un moyen de corroborer l'idée selon laquelle presque tout point d'un ensemble mesurable est presque entièrement entouré par des points du même ensemble. Posons, pour un ensemble fermé F , en notant $\delta(x) = \text{dist}(x, F)$, l'intégrale :

$$I(x) = \int_{|y| \leq 1} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} dy,$$

intégrale venant avec le théorème suivant :

Théorème. 1.2.1. *Si x est en dehors de F , alors $I(x) = \infty$, autrement I converge.*

Ce théorème se démontre aisément grâce au lemme suivant :

Lemme. 1.2.1. *Soit F un ensemble fermé dont le complémentaire a mesure finie. Posons :*

$$I_*(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} dy.$$

Alors pour presque tout x dans F , on a : $I_(x) < \infty$, et de surcroît :*

$$\int_F I_* \leq c \cdot m({}^c F).$$

Preuve du Lemme. 1.2.1. : Par positivité, il suffit de montrer la dernière formule, et par cette même positivité, on peut faire le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et donc intervertir les symboles intégraux :

$$\begin{aligned} \int_F I_* &= \int_F \int_{\mathbb{R}^n} dy dx \frac{\delta(x+y)}{|y|^{n+1}} \\ &= \int_F \int_{\mathbb{R}^n} dy dx \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} \\ &= \int_F \int_{{}^c F} dy dx \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} \\ &= \int_{{}^c F} \left(\int_F \frac{dx}{|x-y|^{n+1}} \right) \delta(y) dy \end{aligned} ,$$

puisque $\delta(y)$ minimise la valeur de $|x - y|$ quand x parcourt F , il vient en passant en coordonnées polaires et en notant s_n la mesure de la sphère unité en dimension n :

$$\int_F \frac{dx}{|x - y|^{n+1}} \leq \int_{|x| \geq \delta(y)} \frac{dx}{|x|^{n+1}} = \frac{s_n}{\delta(y)},$$

ainsi :

$$\boxed{\int_F I_* \leq s_n m(F)},$$

d'où I_* est finie presque partout sur F . Ceci donne la convergence du lemme et le prouve au passage.

Preuve du Théorème. 1.2.1. : La divergence est immédiate. En effet, si x est en dehors de F alors il est dans un ouvert disjoint de F , donc il existe une constante $c > 0$ telle que l'on a : $\delta(x + y) \geq c > 0$. Passons donc à la convergence. On note $F_m = F \cup ({}^c B_m)$ et δ_m la distance associée. Montrons que $\delta(x + y) = \delta_m(x + y)$ si $x \in F \cap B_{m-2}$ et $|y| \leq 1$. Pour que x existe il faut choisir un m assez grand pour que F "dépassse" de l'extérieur de B_m . Dans ces conditions, on a $x + y \in B_{m-1}$:

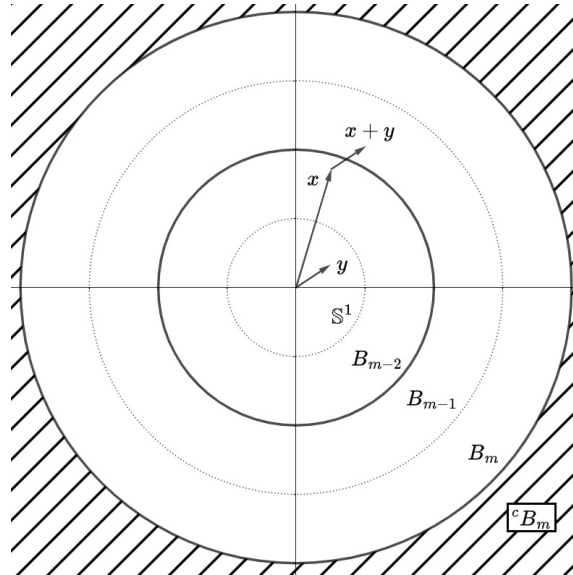


FIGURE 2 – Illustration de la situation sans regarder F

De plus, la condition $x \in F$ demande à $x + y$ d'être, au pire, dans un "agrégat" de norme 1 au large de F . Cet agrégat, ne peut en réalité pas permettre à $x + y$ d'atteindre "mieux" la borne vers ${}^c B_m$ que vers F , car x est choisi dans une boule séparée de 2 unités. Dès lors, il y a donc au moins une unité à parcourir pour atteindre le bord fermé, donc strictement plus d'une unité pour atteindre ${}^c B_m$, or il y a au plus une unité séparant $x + y$ de F , dès lors : $\delta(x + y) \leq \delta_m(x + y)$. Or en toute généralité, on a $F \subset F_m$, et les distances qu'on a définies sont des inf donc on a toujours : $\delta_m \leq \delta$, et ici donc :

$$\boxed{\forall x \in F \cap B_{m-2}, \forall y \in \overline{B(0, 1)}, \delta(x + y) = \delta_m(x + y)}.$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme pour de tels x et dès lors :

$$\forall x \in F \cap B_{m-2}, I(x) < \infty,$$

faire tendre m à l'infini permet de conclure la preuve du théorème.

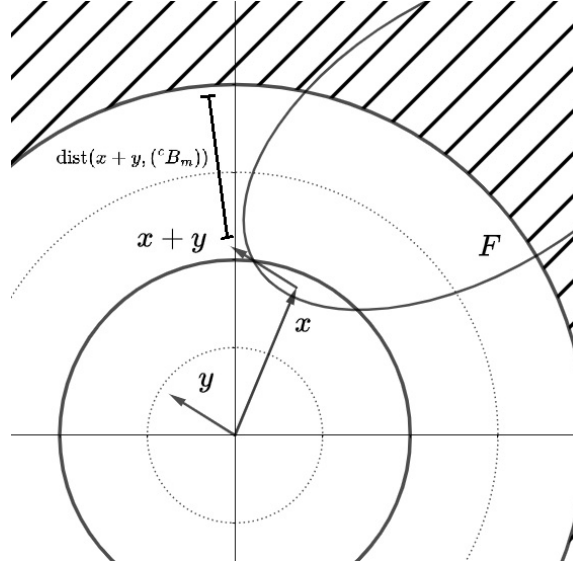


FIGURE 3 – Illustration de la situation avec F

1.3 Décompositions en cubes

Il va nous être nécessaire pour la suite de démontrer un théorème de recouvrement par une certaine famille (régulière) de cubes. La preuve est délicate, j'en expose le plus de détails possible quand cela est nécessaire. On dira que ces cubes sont disjoints si leur intérieur le sont. Enfin par "cube", on entend un cube fermé de $\mathbb{R}^n$ dont les côtés sont parallèles aux axes définis par la base canonique. On notera par ailleurs $\Delta(Q)$ le diamètre d'un cube.

Théorème. 1.3.1. *Soit F un ensemble fermé non-vidé de $\mathbb{R}^n$ dont on note Ω le complémentaire. Il existe une famille de cubes $\mathcal{F} = \{Q_1, \dots, Q_k, \dots\}$ telle que :*

- i) $\cup_k Q_k = \Omega$,
 - ii) Les Q_k sont mutuellement disjoints,
 - iii) $c_1 \Delta(Q_k) \leq d(Q_k, F) \leq c_2 \Delta(Q_k)$,
- les constantes c_1 et c_2 sont indépendantes de F et $(c_1, c_2) = (1, 4)$ convient.

Preuve du Théorème. 1.3.1. : Considérons le réseau de points $\mathbb{Z}^n$, et relier ces points les uns aux autres suivant les axes. On obtient par ce procédé un **maillage** que l'on note $\mathcal{M}_0$ et de ce premier maillage l'on tire une chaîne dyadique de tels maillages $\{\mathcal{M}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, où $\mathcal{M}_k = 2^{-k} \mathcal{M}_0$.

Donc un cube d'un maillage donne lieu à 2^n nouveaux cubes lors du processus. Le diamètre d'un cube à l'étape k est (géométrie euclidienne) $\sqrt{n} 2^{-k}$. En plus de ces cubes, on considère les **couches** Ω_k définies comme suit :

$$\Omega_k := \{x : c 2^{-k} < \delta(x) \leq c 2^{-k+1}\},$$

où c est une constante positive que l'on fixera par la suite. Par définition :

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k.$$

On fait maintenant un choix initial de cubes $\mathcal{F}_0$, on réalise ce choix suivant les cubes

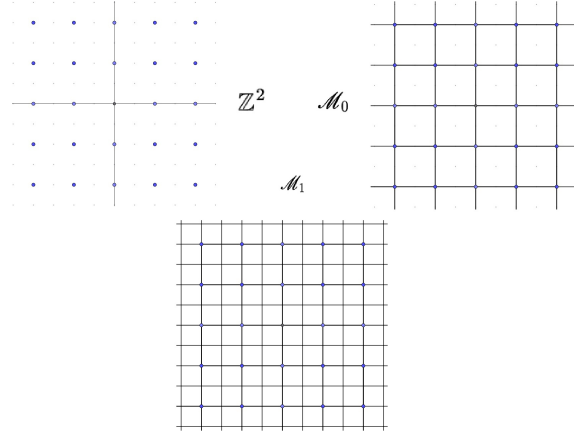


FIGURE 4 – Illustration du procédé de maillage

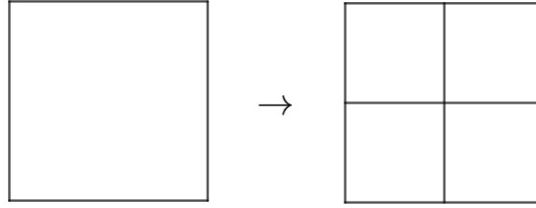


FIGURE 5 – 1 cube en donne 4 en dimension 2

qui intersectent, dans l'ordre de leur maillage, la couche associée, je veux dire :

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{Q \in \mathcal{M}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\},$$

d'où encore par définition (puisque les cubes recouvrent tout l'espace et que Ω est recouvert par ces couches) :

$$\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

Montrons maintenant l'inégalité *iii*) du théorème pour les cubes de ce choix. Soit $Q \in \mathcal{F}_0$, initialement dans le k^e maillage. Le diamètre de ce cube est $\sqrt{n}2^{-k}$, il existe par définition de notre famille, $x \in Q \cap \Omega_k$. Ainsi :

$$d(Q, F) \leq \delta(x) \leq c2^{-k+1},$$

et par inégalité triangulaire inverse :

$$d(Q, F) \geq \delta(x) - \Delta(Q) > c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k},$$

d'où pour $c := 2\sqrt{n}$ on obtient le résultat annoncé. Dès lors, les cubes de notre famille sont disjoints de F et recouvrent Ω , le point *i*) du théorème est donc aussi prouvé. Pour montrer le point *ii*) il suffit d'avoir la structure du processus en tête. Si deux cubes de la famille ont une intersection non triviale, alors deux cas se présentent. Le premier est si ces cubes sont du même maillage, alors par construction, ils sont égaux. Le second cas est celui où les deux cubes sont issus de deux maillages différents, alors nécessairement l'un est inclus dans l'autre, puisque l'on découpe selon chaque axe à chaque étape. Par des considérations géométrique élémentaires, on peut prendre un cube dit maximal à chaque fois et constituer notre famille de cubes

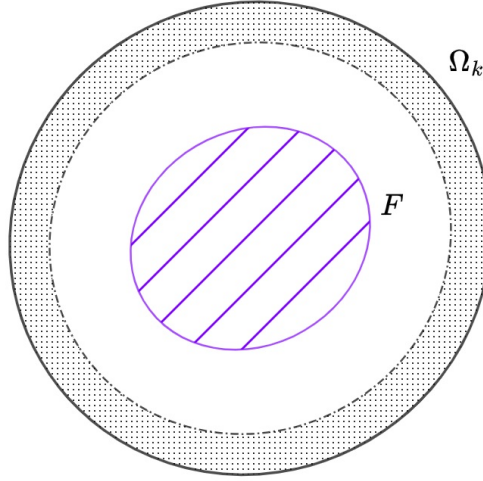


FIGURE 6 – Ω_k reproduit une couche suivant la forme de F

comme cela, notée $\mathcal{F}$ (pas besoin d'avoir recours au lemme de Zorn). Le théorème est prouvé.

On montre un deuxième théorème de recouvrement par des cubes.

Théorème. 1.3.2. *Soit f une fonction positive, intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\alpha > 0$. Il existe une décomposition de $\mathbb{R}^n$ telle que :*

i) $\mathbb{R}^n = F \coprod \Omega$

ii) $f \leq \alpha$ presque partout sur F

iii) Ω est la réunion de cubes Q_k d'intérieurs disjoints et tels que :

$$\alpha < \int_{Q_k} f \leq 2^n \alpha.$$

Preuve du Théorème. 1.3.2. : On décompose $\mathbb{R}^n$ en un maillage de cubes égaux, d'intérieurs disjoints et de diamètre assez grand pour que $\frac{1}{m(Q)} \int_Q f \leq \alpha$. On prend un cube Q de ce maillage, on le bissecte dans toutes les directions, donnant naissance à (comme avant...) 2^n cubes lui étant congruents. Soit Q' un de ces cubes, et partant, deux cas se posent. Soit l'intégrale sur ce cube est encore petite devant α , soit elle ne l'est plus. Si l'on se trouve dans le second cas, alors on choisit Q' comme étant l'un des Q_k de l'énoncé. Pour ce choix là :

$$\alpha < \int_{Q'} f \leq \frac{1}{2^{-n}} \int_Q f \leq 2^n \alpha.$$

Dans l'autre cas, on recommence les divisions, et l'intégrale tend vers 0 pour une telle famille lorsque le diamètre tend vers 0, ce qui assure la finitude de l'algorithme. On pose alors :

$$\Omega = \bigcup_k Q_k,$$

l'union des cubes obtenus par cet algorithme (notons qu'il faut au plus un nombre dénombrable d'étapes... on a besoin de l'axiome du choix dénombrable pour le choix des Q initiaux, ce qui reste acceptable conventionnellement). On pose $F = ({}^c\Omega)$. Pour ce F on a d'après la discussion en 1.2. :

$$f(x) = \lim_{\substack{Q: x \in Q \\ \Delta(Q) \rightarrow 0}} \int_Q f,$$

or de tels cubes sont des cubes qui n'ont pas été choisis puisque x y appartient, donc ils vérifient le premier cas, et dès lors, pour presque tout x dans F , on a $f(x) \leq \alpha$. Le théorème est prouvé.

Ce théorème vient avec un corollaire immédiat. On le démontre toutefois d'une autre manière pour obtenir une information supplémentaire. Avec le théorème, on montre directement que $(A, B) = (1, 2^n)$ convient.

Corollaire. 1.3.1. *Soit f , α , F , Ω et Q_k comme dans le Théorème. 3.3.2.. Alors il existe deux constantes A et B (dépendants uniquement de la dimension n), telles que i) et ii) soient toujours vraies et telles que :*

$$m(\Omega) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}, \text{ et, } \int_{Q_k} f \leq B\alpha.$$

Preuve du Corollaire. 1.3.1. : Posons $F = \{Mf \leq \alpha\}$ et $\Omega = E_\alpha \triangleq \{Mf > \alpha\}$, on applique le b) du théorème 1.1.1. :

$$m(\Omega) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

D'où $A = 5^n$ convient. Ici, F est fermée, donc on peut appliquer le théorème 1.3.1. et dès lors $\Omega = \cup Q_k$ et ces cubes ont leur diamètre proportionnels à leur distance à F . Soit Q_k un de ces cubes, et p_k minimisant la distance à F depuis celui-ci (cf cours). Soit B_k la plus petite boule centrée en p_k contenant l'intérieur de Q_k . On pose :

$$\gamma_k = \frac{m(B_k)}{m(Q_k)}$$

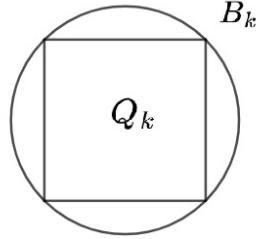


FIGURE 7 – Présente situation en dimension 2, quand p_k est le centre du cube

Comme $p_k \in F$, on a :

$$\alpha \geq Mf(p_k) \geq \int_{B_k} f \geq \frac{1}{\gamma_k} \int_{Q_k} f,$$

or, dans le "pire" des cas (géométriquement), p_k est un des coins de Q_k , donc la boule est de rayon le diamètre du cube, on note ℓ la longueur d'un côté de Q_k . On a alors, r_k le rayon de B_k :

$$r_k = \sqrt{n}\ell,$$

donc :

$$m(B_k) \leq s_n(\sqrt{n}\ell)^n,$$

alors on a finalement :

$$\gamma_k \leq \frac{s_n n^{n/2} \ell^n}{\ell^n} = s_n n^{n/2}.$$

Le corollaire est alors démontré.

1.4 Taille relative et interpolation

Commençons par formaliser l'idée de taille relative exposée pour le théorème 1.1.1. Il s'agissait de découper f selon qu'elle soit de norme grande ou petite. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions. Soit T un opérateur de L^p sur L^q , avec $1 \leq p, q \leq \infty$.

On dira que T est de type (p, q) si :

$$||\langle T, f \rangle||_{L^q} \leq A ||f||_{L^p},$$

où A ne dépend pas de f .

On dira que T est de type-faible (p, q) si :

$$m\{|Tf| > \alpha\} \leq \left(\frac{A ||f||_{L^p}}{\alpha} \right)^q,$$

quand $q < \infty$. Si $q = \infty$, et T de type (p, q) , on dira plutôt T de type-faible (p, q) .

Donnons-nous une constante positive γ . On définit :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & : |f(x)| > \gamma \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases},$$

et :

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & : |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases},$$

de sorte que $f = f_1 + f_2$, et si $p_1 \leq p \leq p_2$, alors avec $f \in L^p$, on a :

$$||f_1||_{L^{p_1}} \leq \gamma^{p_1-p} ||f||_{L^p},$$

car la différence d'ordre est négative, et :

$$||f_2||_{L^{p_2}} \leq \gamma^{p_2-p} ||f||_{L^p}.$$

Cette écriture montre :

$$\boxed{\forall p_1 \leq p \leq p_2, L^p \subset L^{p_1} + L^{p_2}},$$

et cette idée permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème. 1.4.1. Soit $r \in]1, \infty]$. Si T est un opérateur sous-additif de $L^1 + L^r$ vers l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, de type faible $(1, 1)$ et (r, r) , alors T est de type (p, p) pour tout $p \in]1, r[$.

Preuve du Théorème. 1.4.1. : On doit estimer la fonction de distribution associée à Tf , notée λ comme en 1.1. Utilisons notre découpe pour $p_1 = 1$ et $p_2 = r$. Par sous-additivité :

$$|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|,$$

ainsi, par contraposée, on a :

$$\{|Tf| > \alpha\} \subset \{|Tf_1| > \alpha/2\} \cup \{|Tf_2| > \alpha/2\},$$

donc :

$$m\{|Tf| > \alpha\} \leq m\{|Tf_1| > \alpha/2\} + m\{|Tf_2| > \alpha/2\},$$

par hypothèses :

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{2A_1}{\alpha} \|f_1\|_{L^1} + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \|f_2\|_{L^r}^r,$$

par définitions :

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{2A_1}{\alpha} \int_{|f|>\alpha} |f| + \frac{(2A_r)^r}{\alpha^r} \int_{|f|\leq\alpha} |f|^r.$$

On a par ailleurs, par positivité, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\int |Tf|^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|Tf|} d\alpha dx p \alpha^{p-1} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{|Tf|>\alpha} dx d\alpha p \alpha^{p-1} = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha,$$

en multipliant par $p\alpha^{p-1}$ et en intégrant, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\|Tf\|_{L^p}^p \leq 2A_1 \int_0^\infty \int_{|f|>\alpha} dx d\alpha p \alpha^{p-2} |f| + (2A_r)^r \int_0^\infty \int_{|f|\leq\alpha} dx d\alpha p \alpha^{p-(r+1)} |f|^r,$$

puis :

$$\|Tf\|_{L^p}^p \leq 2A_1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f|} d\alpha dx p \alpha^{p-2} |f| + (2A_r)^r \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|f|}^\infty d\alpha dx p \alpha^{p-(r+1)} |f|^r,$$

c'est-à-dire :

$$\|Tf\|_{L^p}^p \leq \frac{2A_1 p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha |f|^{p-1} |f| + \frac{(2A_r)^r p}{p-r} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p-r} |f|^r,$$

ou encore :

$$\boxed{\|Tf\|_{L^p}^p \leq p \left(\frac{2A_1}{p-1} + \frac{(2A_r)^r}{p-r} \right) \|f\|_{L^p}^p.}$$

Le cas $r = \infty$ ne pose pas de problème.

1.5 Transformée de Fourier L^2

Posons d'abord :

$$\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \text{ et, } \mathcal{S} := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall p, q \in \mathbb{N}^n, |x^p D^q \phi(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0\},$$

où l'on a noté :

$$\forall p \in \mathbb{N}^n, x \mapsto x^p := ((x^1)^{p^1}, \dots, (x^n)^{p^n}), \text{ et, } D^p \phi := \frac{\partial^{|p|} \phi}{\partial_1^{p^1} \dots \partial_n^{p^n}}.$$

On appelle $\mathcal{D}$ l'espace de fonctions tests sur $\mathbb{R}^n$, et $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide. On sait que (cf cours) $\mathcal{D}$ est dense dans L^2 , donc par inclusion, $\mathcal{S}$ aussi, sous réserve d'avoir montré que $\mathcal{S} \subset L^2$. Montrons ce fait. Soit ϕ à décroissance rapide. Il existe $C > 0$, tel que si $|x| > C$, alors $|x\phi(x)| \leq 1$, ainsi, dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2 = \int_{|x|>C} |\phi|^2 + \int_{|x|\leq C} |\phi|^2 < \infty,$$

donc ϕ est de carré sommable. On montrerait aussi facilement que l'on a même $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$, et alors on peut définir la transformée de Fourier de $\phi \in \mathcal{S}$:

$$\widehat{\phi}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{2i\pi x \cdot y} dx,$$

montrons de plus que la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ est isométrique, et est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{S}$ sur lui-même : C'est le **Théorème de Plancherel**. Commençons par l'isométrie. Par Fubini-Lebesgue et par la formule d'inversion :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int \phi \overline{\psi} = \int \int d\omega dx \phi(x) \overline{\widehat{\psi}(\omega)} e^{2i\pi x \cdot \omega} = \int \widehat{\phi} \overline{\widehat{\psi}} = \langle \widehat{\phi}, \widehat{\psi} \rangle,$$

on montre ensuite sans problème que (par récurrence) :

$$\forall p \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, D^p \widehat{\phi}(x) = (-2i\pi)^p \widehat{x^p \phi(x)}, \text{ et, } \widehat{D^p \phi(x)} = (2i\pi x)^p \widehat{\phi}(x),$$

et cela montre par définition de $\mathcal{S}$ que cet ensemble est stable par transformée de Fourier. Montrer que la transformée est injective sur $\mathcal{S}$ est immédiat par convergence uniforme et la surjectivité découle de la formule d'inversion.

Cela fait, on peut étendre la transformée de Fourier aux fonctions de carré sommable. Soit $f \in L^2$, par densité, il existe une suite (f_k) à décroissance rapide telle qu'elle tende vers f dans L^2 . Par Plancherel, on montre que la suite $(\widehat{f_k})$ est de Cauchy et L^2 étant complet, on a une limite $\mathcal{F}f := \widehat{f}$ qui ne dépend pas de la suite (f_k) choisie au départ (encore par Plancherel). En passant des détails techniques élémentaires, on obtient que cette nouvelle définition étendue de la transformation de Fourier coïncide avec la précédente sur les fonctions à décroissance rapide, que c'est un isomorphisme et que l'égalité de Plancherel est conservée. On peut donc passer à la suite.

1.6 Théorème d'interpolation pour les opérateurs singuliers

On s'intéresse à des transformations définies par des convolutions avec un **noyau singulier**. On a besoin de plusieurs théorèmes. Voici le premier :

Théorème 1.6.1. Soit $K \in L^2$. Supposons $\widehat{K} \in L^\infty$, K de classe C^1 en dehors de l'origine et

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{\|\widehat{K}\|_{L^\infty}}{|x|^{n+1}}.$$

Si l'on pose $Tf = K * f$, pour $f \in L^1 \cap L^p$, alors T est de type (p, p) pour tout $1 < p < \infty$, et T se prolonge à tous ces L^p .

Preuve du Théorème 1.6.1. :

Première étape : Type-faible (2, 2)

Par Fubini-Lebesgue, on a $\widehat{Tf} = \widehat{K}\widehat{f}$, pour $f \in L^1 \cap L^2$. Par Plancherel :

$$\|Tf\|_{L^2} = \|\widehat{Tf}\|_{L^2} \leq \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2},$$

par continuité, on étend T à tout L^2 , et par ailleurs, on sait que le type fort implique le type faible, donc :

$$m\{|Tf| > \alpha\} \leq \frac{\|\widehat{K}\|_{L^\infty}^2}{\alpha^2} \|f\|_{L^2}^2.$$

Deuxième étape : Type-faible (1, 1)

Fixons $\alpha > 0$ et appliquons le Théorème 1.3.2. pour ce α et pour $|f|$. Il existe alors F et Ω tels que $\mathbb{R}^n = F \coprod \Omega$, $|f| \leq \alpha$ sur F et $\Omega = \cup Q_k$ pour des cubes mutuellement disjoints de diamètre comparable à leur distance à F , tels que :

$$m(\Omega) \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}, \text{ et, } \int_{Q_k} |f| \leq 2^n \alpha.$$

Posons alors :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F \\ \int_{Q_k} f, & x \in \overset{\circ}{Q}_k \end{cases},$$

qui définit f_1 presque partout. On pose alors : $f_2 = f - f_1$ presque partout. Ainsi :

$$f_2 \equiv 0, \text{ sur } F, \text{ et, } \int_{Q_k} f_2 = 0.$$

Comme par linéarité on a, $Tf = Tf_1 + Tf_2$, et bien il suit :

$$m\{|Tf| > \alpha\} \leq m\{|Tf_1| > \alpha/2\} + m\{|Tf_2| > \alpha/2\}.$$

On estime d'abord Tf_1 . On a $f_1 \in L^2$ car par définition et le Théorème 1.3.2. :

$$\|f_1\|_{L^2}^2 = \int_F |f_1|^2 + \int_\Omega |f_1|^2 \leq \int_F \alpha |f| + 2^{2n} \alpha^2 m(\Omega) \leq (1 + 2^{2n}) \alpha \|f\|_{L^1} < \infty,$$

donc on peut appliquer le résultat de la première étape :

$$m\{|Tf_1| > \alpha/2\} \leq \frac{4\|\widehat{K}\|_{L^\infty}^2}{\alpha^2} \|f_1\|_{L^2}^2 \leq \frac{4(1 + 2^{2n})\|\widehat{K}\|_{L^\infty}^2}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

On estime à présent f_2 . On pose pour cela :

$$f_2^k = f_2 \chi_{Q_k},$$

dès lors, $f_2 = \sum_k f_2^k$, et par linéarité, $Tf_2 = \sum_k Tf_2^k$. Comme :

$$\int_{Q_k} f_2 = 0,$$

on a pour $x \in F$:

$$Tf_2^k(x) = \int_{Q_k} K(x-y)f_2(y)dy = \int_{Q_k} [K(x-y) - K(x-y^k)]f_2(y)dy,$$

où l'on a noté y^k le centre du cube Q_k . Comme on a l'hypothèse sur le gradient de K , on applique l'inégalité des accroissements finis (le noyau est régulier en dehors de l'origine, et x est hors des cubes puisque dans F) :

$$|K(x-y) - K(x-y^k)| \leq \sup_{\tilde{y} \in [y, y^k]} |\nabla_{\tilde{y}}(k(x-\tilde{y}))||y-y^k|,$$

d'où immédiatement :

$$|K(x-y) - K(x-y^k)| \leq \frac{\|\widehat{K}\|_{L^\infty} \Delta(Q_k)}{2|x-\bar{y}^k|^{n+1}},$$

où l'on a noté $\bar{y}^k$ un élément atteignant la borne inférieure de $|x-\tilde{y}|$ lorsque l'on parcourt le segment $[y, y^k]$. Or on a pris des cubes dont le diamètre est comparable à leur distance à F . Dès lors :

$$|x-y| \geq d(Q_k, F) \geq \Delta(Q_k),$$

pour tout y dans Q_k . On a alors :

$$|x-y| \leq |x-\bar{y}^k| + |\bar{y}^k - y| \leq |x-\bar{y}^k| + \Delta(Q_k) \leq 2|x-\bar{y}^k|,$$

d'où :

$$|Tf_2^k(x)| \leq \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \Delta(Q_k) \int_{Q_k} \frac{|f_2(y)|dy}{|x-y|^{n+1}}.$$

Par définition :

$$\int_{Q_k} |f_2| \leq \int_{Q_k} |f| + \int_{Q_k} |f_1| \leq 2^{n+1} \alpha m(Q_k).$$

Ensuite, on utilise encore les inégalités de comparaison des diamètre et distance :

$$\Delta(Q_k)m(Q_k) = \int_{Q_k} \Delta(Q_k) \leq \int_{Q_k} d(Q_k, F) \leq \int_{Q_k} \delta(y)dy,$$

or :

$$\Delta(Q_k) \int_{Q_k} \frac{|f_2(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \leq 2^{n+1} \alpha \int_{Q_k} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy.$$

En effet, par les deux inégalités qui précèdent celle-ci, on a :

$$0 \leq \int_{Q_k} [\Delta(Q_k)|f_2| - 2^{n+1}\alpha\delta] = \int_{Q_k} \frac{|x-y|^{n+1}}{|x-y|^{n+1}} [\Delta(Q_k)|f_2(y)| - 2^{n+1}\alpha\delta(y)]dy,$$

or Q_k est un compact disjoint de F , donc $0 < |x-y| \leq \sup_{y \in Q_k} |x-y| =: \delta_x$, d'où :

$$0 \leq \delta_x^{n+1} \left(\int_{Q_k} \frac{[\Delta(Q_k)|f_2| - 2^{n+1}\alpha\delta]}{|x-y|^{n+1}} \right),$$

donc :

$$0 \leq \int_{Q_k} \frac{[\Delta(Q_k)|f_2| - 2^{n+1}\alpha\delta]}{|x-y|^{n+1}},$$

ce qui montre l'inégalité. Ainsi :

$$|Tf_2^k(x)| \leq 2^{n+1} \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \alpha \int_{Q_k} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy.$$

Par sommation :

$$|Tf_2(x)| \leq 2^{n+1} \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n+1}} dy,$$

et par les Théorèmes 1.2.1. et 1.3.2. :

$$\int_F |Tf_2(x)| dx \leq 2^{n+1} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \alpha m({}^c F) = 2^{n+1} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \alpha m(\Omega) \leq 2^{n+1} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1},$$

d'où :

$$m\{x \in F : |Tf_2(x)| > \alpha/2\} \leq \frac{2^{n+2} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty}}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

Et comme on a :

$$m({}^c F) = m(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1},$$

on a :

$$m\{|Tf_2| > \alpha/2\} \leq \frac{(1 + 2^{n+2} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty})}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

Enfin :

$$m\{|Tf| > \alpha\} \leq \frac{\left(1 + 2^{n+2} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} + 4(1 + 2^{2n}) \|\widehat{K}\|_{L^\infty}^2\right)}{\alpha} \|f\|_{L^1}.$$

Dernière étape : Inégalités L^p

On a déjà montré le cas $p = 2$ à la première étape. Pour le cas $1 < p < 2$, on utilise le Théorème 1.4.1., on a alors :

$$\|Tf\|_{L^p} \leq 2 \left(\frac{\left(1 + 2^{n+2} s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} + 4(1 + 2^{2n}) \|\widehat{K}\|_{L^\infty}^2\right) p}{p-1} \right)^{1/p} \|f\|_{L^p} =: A_p \|f\|_{L^p},$$

pour $f \in L^p$, et on a explicité dans toute la démonstration les constantes pour en montrer la dépendance explicite qu'elles ont avec les données (seulement le noyau, la dimension spatiale et la dimension fonctionnelle). Enfin, pour le cas $2 < p < \infty$, on utilise le conjugué de Hölder de p , noté $p' := 1/(1 - 1/p)$. Dans ce cas, $p' \in]1, 2[$ et le Théorème est vrai pour cet indice.

Pour utiliser ce fait là, on remarque que si $\psi \in L_{\text{loc}}^1$ est telle que $\sup_{\phi \in C_0^\infty, \|\phi\|_{L^p} \leq 1} \left| \int \psi \phi \right| = A < \infty$, alors $\psi \in L^{p'}$ et $\|\psi\|_{L^{p'}} = A$. En effet, par hypothèse, l'opérateur $P : L^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \int \psi \phi$ est linéaire continu, donc d'après le Théorème de représentation de Riesz (cf cours), il existe $\tilde{\psi} \in L^{p'}$ vérifiant $A = \|P\| = \|\tilde{\psi}\|_{L^{p'}}$. Dès lors, on a :

$$\forall \phi \in C_0^\infty, \int (\psi - \tilde{\psi}) \phi = 0,$$

donc $\psi = \tilde{\psi}$ dans $L^{p'}$.

Reprenons donc le fil de notre démonstration. Prenons $f \in L^1 \cap L^p$, et $\phi \in C_0^\infty$ de norme L^p majorée par 1. On a $K \in L^2$, et par choix de f et ϕ , la double intégrale suivante converge absolument :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} dx dy K(x-y) f(y) \phi(x),$$

donc par Fubini-Lebesgue, elle est égale à :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) \phi(x) dx \right) dy,$$

on utilise le Théorème pour $1 < p' < 2$ et le noyau $K(-(\cdot))$, ainsi, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) \phi(x) dx \in L^{p'}$ et la norme $L^{p'}$ de cette fonctionnelle est majorée par $A_{p'} \|\phi\|_{L^p} \leq A_{p'}$. Par Fubini-Lebesgue et l'inégalité d'Hölder, on a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (Tf(x)) \phi(x) dx \right| = |I| \leq A_{p'} \|f\|_{L^p},$$

d'où par notre remarque, $Tf \in L^p$ et $\|Tf\|_{L^p} \leq A_{p'} \|f\|_{L^p}$, donc :

$$\boxed{\|Tf\|_{L^p} \leq A_{p'} \|f\|_{L^p}}.$$

Il est important de noter que, lorsque p' tend vers 1, on a p qui s'élève à l'infini, dès lors l'estimation connue pour la constante A_p lorsque $p \rightarrow 1$ devient, dans ce cas, une estimation lorsque $p \rightarrow \infty$ et est une estimation polynomiale d'ordre 1 en p . Le Théorème est entièrement démontré.

1.7 Variantes du théorème

Ce premier théorème d'interpolation n'est pas celui que nous utiliserons dans la partie application, il nous faut formuler des hypothèses différentes. On demande au noyau ce qui semble être l'hypothèse la plus faible suffisant à faire marcher les arguments de la preuve précédente, plutôt que de majorer le gradient de ce noyau, on demande :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq B < \infty, \quad |y| > 0,$$

où $B = 2^n s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty}$ convient. On montre sans difficulté que notre hypothèse sur le gradient implique celle-ci. En effet, comme plus haut par l'inégalité des accroissements finis :

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \frac{\|\widehat{K}\|_{L^\infty} |y|}{|\bar{x}|^{n+1}},$$

où $\bar{x} \in [x, x-y]$ optimise le *supremum* implicite. Puisque cet élément est sur ce segment, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\bar{x} = x - \lambda y$, donc $|\bar{x}| \geq |x| - |y| \geq |x|/2$, d'où :

$$|K(x-y) - K(x)| \leq \frac{\|\widehat{K}\|_{L^\infty} |y|}{|\bar{x}|^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1} \|\widehat{K}\|_{L^\infty} |y|}{|x|^{n+1}},$$

en passant en polaire dans l'intégrale on a alors :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq 2^n s_n \|\widehat{K}\|_{L^\infty} < \infty, \quad |y| > 0.$$

On a alors :

Théorème 1.7.1. *Le Théorème 1.6.1. reste vrai en échangeant l'hypothèse sur le gradient par l'hypothèse exposée plus haut.*

Preuve du Théorème 1.7.1. : On montre ce qui doit changer dans la preuve précédente. Les changements ont lieu dans l'établissement du type-faible (1, 1). On n'utilise plus la comparabilité entre les diamètres et les distances. Au lieu de cela on considère les cubes Q_k^* dont la longueur des côtés a été augmentée de $2\sqrt{n}$. Dès lors, on a : $Q_k \subset Q_k^*$, avec des notations analogues, $\Omega \subset \Omega^*$, $m(\Omega^*) \leq (2\sqrt{n})^n m(\Omega)$ et $F^* \subset F$. De plus, si $x \notin Q_k^*$, alors $|x - y^k| \geq 2|y - y^k|$, pour tout $y \in Q_k$ et où y^k dénote le centre de Q_k . En effet, en notant ℓ la longueur d'un côté de Q_k et pour de tels x et y , on a d'abord pour chaque coordonnées : $|y_i - y_i^k| \leq \ell$, donc par l'équivalence des normes 2 et ∞ (cf cours), on a :

$$|y - y^k| \leq \sqrt{n}\ell,$$

ensuite, comme $x \notin Q_k^*$, il existe une direction j telle que : $|x_j - y_j^k| > 2\sqrt{n}\ell$, et encore par équivalence des normes 2 et ∞ et par l'inégalité précédente :

$$|x - y^k| \geq 2\sqrt{n}\ell \geq 2|y - y^k|.$$

L'autre différence surgît lors de l'estimation de $|Tf_2|$. On ne majore plus par l'intégrale de Marcinkiewicz, on l'estime plutôt directement. On se sert de F^* . On note Tf_2^k comme dans la preuve. On a :

$$\int_{F^*} |Tf_2| \leq \sum_k \int_{Q_k^*} \int_{Q_k} dy dx |K(x-y) - K(x-y^k)| |f_2(y)|,$$

par la nouvelle hypothèse formulée :

$$\int_{Q_k^*} |K(x-y) - K(x-y^k)| dx \leq \int_{|x'| \geq 2|y'|} |K(x'-y') - K(x')| dx' \leq B,$$

donc, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a :

$$\int_{F^*} |Tf_2| \leq B \int_{Q_k} |f_2| \leq B \int_{Q_k} (|f| + |f_1|) \leq 2^{n+1} m(\Omega) \alpha \leq 2^{n+1} \|f\|_{L^1},$$

ce qui suffit à reprendre le fil de la démonstration.

Il reste à outrepasser le problème de la condition $K \in L^2$. On veut donc se débarrasser de cette hypothèse et demander des conditions qui impliqueront ce fait-là. Le cas qui nous intéresse est le cas des valeur-principales d'intégrales singulières qui existent grâce à une condition d'annulations de termes positifs et négatifs. C'est ce que l'on demande :

$$\int_{R_1 < |x| < R_2} K(x) dx = 0.$$

Théorème 1.7.2. *Le théorème 1.6.1. reste vrai avec les hypothèses du Théorème 1.7.1. et en remplaçant l'hypothèse L^2 par celle plus haut, en considérant des noyaux du type borné par $B/|x|^n$. C'est-à-dire, si K est tel que :*

- i) $|K(x)| \leq B|x|^{-n}$, $0 < |x|$
- ii) $\int_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx < B$, $0 < |y|$
- iii) $\int_{R_1 < |x| < R_2} K(x)dx = 0$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$

Alors si on pose pour $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, l'opérateur :

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y)K(y)dy, \quad \varepsilon > 0,$$

est continu de L^p sur lui-même :

$$\|T_\varepsilon f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p},$$

où A_p est indépendant de f et ε . De plus la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f = Tf$ existe en norme L^p et l'opérateur limite T conserve la continuité obtenue plus haut.

Preuve du théorème 1.7.2. : La première hypothèse, associée à la troisième permettent de prouver l'hypothèse L^2 et, partant, la convergence L^p de l'intégrale tronquée. Montrons l'hypothèse L^2 via le lemme suivant :

Lemme 1.7.1. *Prenons un noyau K vérifiant les hypothèses du théorème 1.7.2.. Posons $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\varepsilon B(0,\varepsilon)}(x)$. Dès lors, on a immédiatement $K_\varepsilon \in L^2$. Pour sa transformée de Fourier, on a l'estimation suivante :*

$$\sup_y |\widehat{K_\varepsilon}(y)| \leq CB,$$

où C ne dépend que de la dimension n .

Preuve du Lemme 1.7.1. : On commence par le cas $\varepsilon = 1$. Montrons que K_1 vérifie des conditions similaires à K , on découpe pour cela l'intégrale des écarts, écarts que l'on note $E_\varepsilon^y(x)$ à y fixé et sans l'indice ε pour K , on commence par le cas $|y| < 1/2$:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x)dx &= \int_{1 \geq |x| \geq 2|y|} E_1^y(x)dx + \int_{|x| \geq 1} E_1^y(x)dx \\ &= \int_{1 \geq |x| \geq 2|y|} E_1^y(x)dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x-y| \geq 1}} E_1^y(x)dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x-y| \leq 1}} E_1^y(x)dx \\ &= \int_{\substack{1 \geq |x| \geq 2|y| \\ |x-y| \geq 1}} |K(x-y)|dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x-y| \geq 1}} E^y(x)dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x-y| \leq 1}} |K(x)|dx \\ &\leq \int_{\substack{1 \geq |x+y| \geq 2|y| \\ |x| \geq 1}} |K(x)|dx + \int_{|x| \geq 2|y|} E^y(x)dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x| \leq 3/2}} |K(x)|dx, \end{aligned}$$

par changement de variables dans la première intégrale de la dernière ligne, avec les inclusions $\{x : |x| \geq 1, |x-y| \geq 1\} \subset \{x : |x| \geq 1\} \subset \{x : |x| \geq 2|y|\}$ car $2|y| < 1$, et avec l'inclusion $\{x : |x| \geq 1, |x-y| \leq 1\} \subset \{x : 1 \leq |x| \leq 3/2\}$ car $|x-y| \leq 1$ implique $|x| - |y| \leq 1$ et avec $|y| < 1/2$ on a l'inclusion. On peut

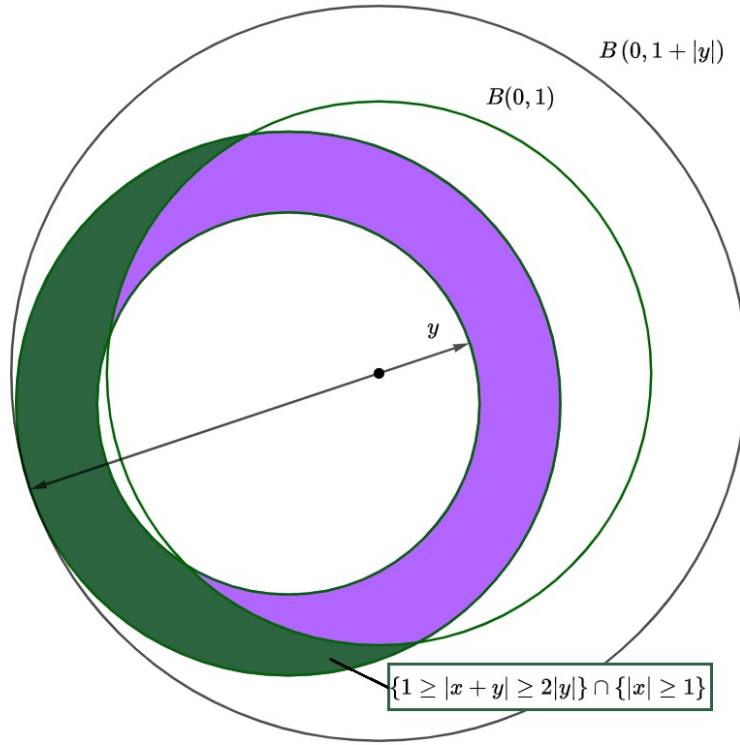


FIGURE 8 – Illustration de la zone d'intégration de la première intégrale

estimer les deux dernières intégrales en utilisant respectivement les hypothèses *ii*) et *i*). A elles deux elles donnent une estimation (par les coordonnées polaires pour la dernière intégrale) :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} E^y(x) dx + \int_{\substack{|x| \geq 1 \\ |x| \leq 3/2}} |K(x)| dx \leq B(1 + s_n \ln(3/2)).$$

Pour estimer la première intégrale de la dernière ligne, on remarque que le domaine d'intégration est un croissant de lune inclus dans une certaine couronne, par des considérations géométriques élémentaires on montre que ce croissant est dans le couronne de grand rayon $1 + |y| \leq 3/2$ et de petit rayon 1, c'est donc la même estimation que pour la dernière intégrale, et on a au final :

$$\boxed{\int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x) dx \leq B(1 + 2s_n \ln(3/2))}.$$

On examine maintenant le cas $|y| \geq 1/2$. Ce cas donne directement que $|x| \geq 1$, donc le terme de l'écart en $K_1(x)$ est égal à $K(x)$ il ne reste que le terme $K_1(x - y)$ qui pose une condition sur le domaine :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x) dx = \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x-y| < 1}} |K(x)| dx + \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x-y| \geq 1}} E^y(x) dx \leq B \left(1 + \int_{\substack{|x| \geq 2|y| \\ |x| \leq 1+|y|}} |x|^{-n} dx \right),$$

c'est-à-dire :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x) dx \leq B \left(1 + s_n \ln \left(\frac{1 + |y|}{2|y|} \right) \right) \leq B \left(1 + s_n \ln \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|y|} \right) \right) \right),$$

or comme $|y| \geq 1/2$, on a $|y|^{-1} \leq 2$. Donc on a finalement, par croissance du logarithme, l'estimation suivante :

$$\boxed{\int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x) dx \leq B(1 + s_n \ln(3/2))},$$

au cumulé, en prenant le maximum des deux :

$$\boxed{\int_{|x| \geq 2|y|} E_1^y(x) dx \leq B(1 + 2s_n \ln(3/2)), \quad |y| > 0}.$$

Ainsi, nous avons montré que K_1 vérifie à son tour des estimations similaires à K . On va maintenant estimer la transformée de Fourier de K_1 en l'écrivant en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \widehat{K}_1(y) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \\ &= \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Puisque la condition d'annulation est vérifiée pour K_1 on peut soustraire une fois l'intégrale de K_1 ($R_1 = \varepsilon$ ou directement nulle suivant la taille de y) :

$$I_1 = \int_{|x| \leq 1/|y|} (e^{2i\pi x \cdot y} - 1) K_1(x) dx.$$

Par ailleurs on a :

$$|e^{2i\pi x \cdot y} - 1| = \left| \int_0^{2\pi x \cdot y} i e^{it} dt \right| \leq \left| \int_0^{2\pi x \cdot y} |i e^{it}| dt \right| = 2\pi |x \cdot y| \leq 2\pi |x| |y|,$$

donc :

$$\boxed{|I_1| \leq 2\pi |y| \int_{|x| \leq 1/|y|} |x| |K_1(x)| dx \leq 2\pi |y| B \int_{|x| \leq 1/|y|} 1/|x|^{n-1} dx = 2\pi B},$$

en passant en polaires. Posons $z := z(y) = y/2|y|^2$, de telle sorte que $|z| = 1/2|y|$ et $e^{2i\pi y \cdot z} = -1$. Dès lors, par changement de variables, on montre :

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_1(x) e^{2i\pi x \cdot y} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [K_1(x) - K_1(x - z)] e^{2i\pi x \cdot y} dx.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \right\} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx - \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \right\} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{|x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx \right\} - \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx - \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) + K_1(x-z)) dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{|x| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx + \frac{1}{2} \int_{|x+z| \leq 1/|y|} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{1/|y| \leq |x| \leq R} e^{2i\pi x \cdot y} (K_1(x) - K_1(x-z)) dx \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\substack{|x| \leq 1/|y| \\ 1/|y| \leq |x+z|}} e^{2i\pi x \cdot y} K_1(x) dx,
\end{aligned}$$

la dernière intégrale est prise sur un domaine inclus dans $\{x : 1/2|y| \leq |x| \leq 1/|y|\}$, et comme $|z| = 1/2|y|$, on a :

$$|I_2| \leq B \frac{(1 + s_n \ln(2))}{2}.$$

Dès lors :

$$|\widehat{K}_1(y)| \leq B \left(2\pi + \frac{1}{2} + \frac{s_n \ln(2)}{2} \right),$$

c'est $\widehat{K}_1 \in L^\infty$. Il nous faut maintenant translater ce résultat pour tout $\varepsilon > 0$. On utilise pour cela des opérateurs de dilatation, τ_ε tels que $\tau_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$. Si T est l'opérateur de convolution $Tf = K * f$, alors l'opérateur $\tau_{\varepsilon^{-1}} T \tau_\varepsilon$ correspond au noyau $x \mapsto \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)$. Remarquons sans peine que ce nouveau noyau vérifie des conditions similaires à celles sur K avec les mêmes bornes. Posons à présent $K'(x) = \varepsilon^n K(\varepsilon x)$, K' vérifie les conditions du lemme avec la même borne que K dans les hypothèses du théorème, ainsi :

$$\|\widehat{K}'_1\|_{L^\infty} \leq CB,$$

par suite, la transformée de Fourier de $\varepsilon^{-n} K'_1(\varepsilon^{-1}x)$ est (changement de variables) $\widehat{K}'_1(\varepsilon y)$ et encore de norme infinie bornée par CB , seulement, $\varepsilon^{-n} K'_1(\varepsilon^{-1}x) = K_\varepsilon(x)$ et le lemme est prouvé.

On passe à la preuve du théorème. K vérifie les hypothèses du théorème, donc K_ε aussi avec bornes CB (calculé explicitement plus haut et passe pour $1 \rightarrow \varepsilon$

par les dilatations). Par définition, on a : $K_\varepsilon \in L^2$, donc le Théorème 1.7.1. donne les inégalités de continuité L^p . Prenons maintenant $\phi \in \mathcal{D}$. Par annulation sur les couronnes (hypothèse *iii*) :

$$T_\varepsilon \phi(x) = \int_{|y| \geq 1} K(y) \phi(x-y) dy + \int_{1 \geq |y| \geq \varepsilon} K(y) (\phi(x-y) - \phi(x)) dy,$$

par convolution, la première intégrale définit une fonction L^p (convolution d'une fonction L^1 par une fonction L^p , K , par l'hypothèse *i*), la seconde définit une fonction à support compact, et est prise sur un ensemble compact, par différentiabilité de ϕ (inégalité des accroissements finis), $|\phi(x-y) - \phi(x)| \leq \|\nabla \phi\|_{L^\infty} |y|$, donc toujours par l'hypothèse *i*), celle-ci converge uniformément en x quand $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire $T_\varepsilon \phi$ converge en norme L^p quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la continuité de la norme suffit à faire tenir les inégalités. Le théorème est prouvé.

Ce théorème est d'importance capitale et permet de justifier des intégrales définies par une classe d'opérateurs très importante. Ces opérateurs singuliers apparaissent dans bien des branchements des mathématiques, nous allons nous concentrer sur la démonstration d'un théorème portant sur les équations d'Euler, cette démonstration montre l'existence sous-jacente d'un opérateur intégral singulier et traite son estimation par le biais de nos calculs.

2 Application à la mécanique des fluides

Pour cette section, je suis le livre de Majda et Bertozzi sur le domaine (*cf* A. L. Majda, A. L. Bertozzi, [1]) dont j'ai réorganisé les éléments et j'ai également rajouté beaucoup de détails laissés de côté dans le livre.

Il est temps d'avancer au sujet d'application de ce rapport, les équations de la mécanique des fluides et plus particulièrement, les équations d'Euler. Nous avons besoin d'une formulation de ces équations portant sur la vorticité :

$$D_t \omega = 0.$$

2.1 Les équations d'Euler et l'équation de conservation

Les équations d'Euler pour les fluides incompressibles s'écrivent comme suit,

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases},$$

l'incompressibilité étant contenue dans la seconde équation, la divergence relate la capacité à "grossir" depuis un point donné, si la divergence est nulle alors on comprend intuitivement que le fluide ne peut pas perdre en volume. Pour l'instant on suppose les éléments de régularité convenable, disons C^2 . On définit deux opérateurs différentiels. Le terme de transport $v \cdot \nabla$ est un divergent pondéré par les coordonnées du champ des vitesses :

$$(v \cdot \nabla) = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2,$$

il quantifie l'évolution dans la direction du champ des vitesses v . Le terme vu plus haut, noté D_t , est la dérivé lagrangienne, ou convective :

$$D_t = \partial_t + (v \cdot \nabla),$$

c'est l'évolution spatio-temporelle le long des trajectoires particulières pour un champ v . Pour montrer que la **vorticité scalaire** $\omega := \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ se conserve sur les trajectoires particulières, on prend le produit scalaire de l'équation d'Euler contre le gradient rotationnel (gradient symplectique ou hamiltonien) défini comme le rotat   du gradient :

$$\nabla^\perp f = (-\partial_2 f, \partial_1 f),$$

on voit alors que :

$$\omega = \nabla^\perp \cdot v.$$

Faisons cela après avoir montré que $\nabla^\perp \cdot \nabla f = 0$, le calcul donne :

$$-\partial_2 \partial_1 f + \partial_1 \partial_2 f = 0,$$

par Schwartz, on peut passer au calcul.

$$\begin{aligned} \nabla^\perp \cdot (D_t v) &= -\nabla^\perp \cdot \nabla p \\ \partial_t (\nabla^\perp \cdot v) + \nabla^\perp \cdot ((v \cdot \nabla) v) &= 0 \\ \partial_t \omega + (-\partial_2 (v_1 \partial_1 v_1 + v_2 \partial_2 v_1) + \partial_1 (v_1 \partial_1 v_2 + v_2 \partial_2 v_2)) &= 0, \end{aligned}$$

examinons le premier terme du terme de transport par Leibniz :

$$\begin{aligned} -\partial_2 (v_1 \partial_1 v_1 + v_2 \partial_2 v_1) &= -(\partial_2 v_1 \partial_1 v_1 + v_1 \partial_2 \partial_1 v_1) - (\partial_2 v_2 \partial_2 v_1 + v_2 \partial_2^2 v_1) \\ &= -[(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) \partial_2 v_1 + v_1 \partial_2 \partial_1 v_1 + v_2 \partial_2^2 v_1] \\ &= -(v_1 \partial_2 \partial_1 v_1 + v_2 \partial_2^2 v_1), \end{aligned}$$

puisque le divergent de v est nul. On passe au second terme :

$$\begin{aligned}\partial_1(v_1\partial_1v_2 + v_2\partial_2v_2) &= (\partial_1v_1\partial_1v_2 + v_1\partial_1^2v_2) + (\partial_1v_2\partial_2v_2 + v_2\partial_1\partial_2v_2) \\ &= (\partial_1v_1 + \partial_2v_2)\partial_1v_2 + (v_2\partial_1\partial_2v_2 + v_1\partial_1^2v_2) \\ &= v_2\partial_1\partial_2v_2 + v_1\partial_1^2v_2,\end{aligned}$$

en sommant, on reconnaît ce qu'il nous faut :

$$\boxed{\nabla^\perp \cdot ((v \cdot \nabla)v) = (v_1\partial_1 + v_2\partial_2)(\partial_1v_2 - \partial_2v_1) = (v \cdot \nabla)\omega},$$

ainsi :

$$\boxed{D_t\omega = 0}.$$

2.2 Interprétation de l'équation évolutive

Maintenant, nous introduisons une manière de représenter les particules. On définit l'application de trajectoire des particules, $X(\cdot, t) : \alpha \in \mathbb{R}^N \mapsto X(\alpha, t) \in \mathbb{R}^N$. Compte tenu d'un champ des vitesses $v(x, t)$, le vecteur $X(\alpha, t)$ est la position, au temps t , d'une particule de fluide initialement à la position $\alpha \in \mathbb{R}^N$. Le paramètre α correspond au paramètre lagrangien décrivant les positions des particules dans un espace initial. Cette application est décrite par l'EDO :

$$\partial_t X(\alpha, t) = v(X(\alpha, t), t), \quad X(\alpha, 0) = \alpha,$$

qui la définit uniquement. On plonge $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement. On regarde alors la vortacité $\omega = \nabla \times v$ dont $\nabla^\perp \cdot v$ est la troisième coordonnée, ladite étant la seule non nulle.

Il nous faut à présent montrer que la vortacité reste constante le long des trajectoires des particules en 2D. Pour cela, montrons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit v un champ des vitesses lisse, dont X décrit les trajectoires, vérifiant l'EDO citée plus haut. Soit h un champ de vecteur. On a :*

$$D_t h = h \cdot \nabla v \Leftrightarrow h(X(\alpha, t), t) = \nabla_\alpha X(\alpha, t) h_0(\alpha).$$

Preuve du Lemme 2.2.1. : Différentions l'EDO vérifiée par X par rapport à α et multiplions la par $h_0(\alpha)$, on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\partial_t \nabla_\alpha X(\alpha, t) h_0(\alpha) = (\nabla v)|_{(X(\alpha, t), t)} \nabla_\alpha X(\alpha, t) h_0(\alpha).$$

Le sens retour ne pose pas de problème, alors supposons le membre de gauche de l'équivalence. On a :

$$\begin{aligned}\partial_t(h(X(\alpha, t), t)) &= \partial_t h(X(\alpha, t), t) + \partial_t X(\alpha, t) \cdot \nabla h(X(\alpha, t), t) \\ &= \partial_t h(X(\alpha, t), t) + v(X(\alpha, t), t) \cdot \nabla h(X(\alpha, t), t) \\ &= D_t h(X(\alpha, t), t) \\ &= (\nabla v)|_{(X(\alpha, t), t)} h(X(\alpha, t), t)\end{aligned},$$

donc $\nabla_\alpha X(\alpha, t) h_0(\alpha)$ et $h(X(\alpha, t), t)$ satisfont à la même EDO avec même condition initiale ($h_0(\alpha)$), par unicité, elles sont égales.

Comme le **vecteur** ω satisfait effectivement $D_t\omega = \omega \cdot \nabla v$ (adapter les calculs plus haut au cas tridimensionnel, ce terme dans le second membre est le terme qui introduit les problèmes réels de l'étude de l'équation d'euler en 3D), on a :

$$\omega(X(\alpha, t), t) = \nabla_\alpha X(\alpha, t)\omega_0(\alpha).$$

Montrons que le déterminant jacobien de X vaut 1. Posons :

$$J(\alpha, t) = \det(\nabla_\alpha X(\alpha, t)).$$

Il s'agit de démontrer que ce déterminant jacobien vérifie, pour les conditions du lemme 2.2.1., l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t J = (\nabla \cdot v)|_{(X(\alpha, t), t)} J(\alpha, t).$$

En effet, prenons la dérivée partielle suivant t de l'équation définissant J :

$$\partial_t J = A_i^j \partial_t \partial_j X^i,$$

où les A_i^j sont les mineurs de $\nabla_\alpha X$. On a bien entendu :

$$A_i^j \partial_j X^k = \delta_{ik} J,$$

puis en utilisant l'EDO vérifiée par X et la règle de la chaîne :

$$\partial_t J = A_i^j \partial_j X^k v_{x_k}^i = v_{x_k}^i \delta_i^k J = (\nabla \cdot v) J,$$

ainsi, le fluide étant, dans notre étude, incompressible on a divergence nulle, donc J est constant, or le gradient de X est constant égal à 1 au temps initial, donc, pour tout temps t :

$$\det(\nabla_\alpha X(\alpha, t)) = 1.$$

Grâce à cela, on peut voir $\nabla_\alpha X$ comme une matrice 3×3 de déterminant 1 et de valeurs propres λ , λ^{-1} et 1 et sous la forme (on a 1 en plus car on a plongé dans le plan dans l'espace et le déterminant est multiplicatif) :

$$\begin{pmatrix} X_{\alpha_1}^1 & X_{\alpha_2}^1 & 0 \\ X_{\alpha_1}^2 & X_{\alpha_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Ainsi, comme le **vecteur** $\omega_0(\alpha)$ a pour coordonnées $(0, 0, \omega_0(\alpha))$, les **scalaires** ω et ω_0 vérifient bien l'équation de conservation suivante :

$$\boxed{\omega(X(\alpha, t), t) = \omega_0(\alpha)}.$$

D'où l'on voit que l'équation évolutive traduit bien la conservation de la vortacité le long des trajectoires des particules. Remarquons que ce résultat permet de démontrer que la norme L_p est aussi conservée, puisque X conserve la mesure de Lebesgue.

2.3 Loi de Biot-Savart pour le champ des vitesses

Cette interprétation faite, nous pourrions définir le principe de solution faible pour les équations d'Euler 2D une fois avoir défini v avec une convolution suivant la loi de Biot-Savart. On formule cela sous la formulation suivante, nous voulons v tel que :

$$\begin{cases} \nabla^\perp \cdot v &= \omega \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{cases},$$

ce problème demande de définir la **formule de Green** :

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|,$$

on vérifie que G satisfait à l'équation aux distributions en y :

$$\Delta G(x) = \delta_0,$$

de ce fait, G représente une sorte d'inverse pour le laplacien, on peut montrer que :

$$\Delta(G * f) = f,$$

au sens des distributions. Dès lors, on montre que :

$$v = \nabla^\perp(G * \omega),$$

est une solution du problème posé plus haut. En effet :

$$\nabla^\perp \cdot \nabla^\perp(G * \omega) = \Delta(G * \omega) = \omega,$$

et :

$$\nabla \cdot \nabla^\perp(G * \omega) = 0.$$

On montre l'unicité par transformée de Fourier. Traduisant le problème on a, en notant $\tilde{v}$ la différence entre v et une autre solution :

$$\begin{cases} \zeta^\perp \cdot \widehat{\tilde{v}} &= 0 \\ \zeta \cdot \widehat{\tilde{v}} &= 0 \end{cases},$$

donc $\widehat{\tilde{v}} \equiv 0$ d'où par Plancherel $\tilde{v} \equiv 0$, et v est l'unique solution. De plus, le gradient rotationnel part sur G par propriété de la convolution, d'où l'on trouve :

$$\boxed{v = K * \omega},$$

où :

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2},$$

et :

$$x^\perp = (-x_2, x_1).$$

C'est la loi de Biot-Savart pour la vitesse.

2.4 Formulation faible du problème (partie avancée)

Prenons une vorticité initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. On veut définir une expression équivalente à notre équation de vorticité pour des vorticités non lisses mais simplement dans $L^\infty\{[0, \infty[; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$. Pour faire cela, on raisonne à partir d'une vorticité lisse pour dériver de l'équation **forte** une équation que l'on prendra comme **formulation faible**, dont le sens est conservé pour une classe de fonctions moins régulières. Soit alors ω lisse et ϕ une fonction test à support compact. On a :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} \phi \omega dx = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t(\phi \omega) dx = \int_{\mathbb{R}^2} D_t(\phi \omega) - v \cdot \nabla(\phi \omega) dx,$$

on récrit le second terme :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} \phi \omega dx = \int_{\mathbb{R}^2} D_t(\phi \omega) - \nabla \cdot (\phi \omega v) + \phi \omega (\nabla \cdot v) dx,$$

or le fluide étant incompressible, le troisième terme est nul, et attaquons-nous au deuxième grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \cdot (\phi \omega v) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} \nabla \cdot (\phi \omega v) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|x|=R} \phi \omega v \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

car le support de ϕ est compact, donc borné. Ainsi, on obtient la formule de transport suivante (cas particulier de la **formule de transport de Reynolds** dans lequel le flot $X(\cdot, t)$ est une transformation préservant la mesure de Lebesgue) :

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^2} \phi \omega dx = \int_{\mathbb{R}^2} D_t(\phi \omega) dx = \int_{\mathbb{R}^2} (D_t \phi) \omega dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi (D_t \omega) dx.$$

Intégrons alors cette équation par rapport au temps :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, T) \omega(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, 0) \omega(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} dx dt (D_t \phi) \omega + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} dx dt \phi (D_t \omega),$$

pour le moment nous avons choisi ω lisse, donc l'équation d'évolution de la vorticité est valable, on a alors :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, T) \omega(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, 0) \omega_0(x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} dx dt (D_t \phi) \omega,}$$

l'atout de cette formulation est qu'elle est valable pour toute fonction test $\phi \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ à support compact $\text{supp} \phi(\cdot, t) \subset \{x : |x| \leq R\}$ et pour une vorticité seulement dans $L^\infty\{[0, \infty[; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$. On définit alors les solutions faibles :

Définition. 2.4.1. *Etant donnée une vorticité initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, le couple (v, ω) est solution faible de l'équation d'évolution de la vorticité si :*

- i) $\omega \in L^\infty\{[0, T]; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$,
- ii) $v = K * \omega$ et $\omega = \nabla \times v$,
- iii) Pour tout $\phi \in C^1([0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2))$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, T) \omega(x, T) dx - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, 0) \omega_0(x) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} dx dt (D_t \phi) \omega$$

Montrons qu'il s'agit de la bonne définition.

Proposition. 2.4.1. *Toute solution lisse de l'équation d'Euler 2D est une solution faible au sens de la définition 2.4.1. . Réciproquement, toute solution faible de la définition 2.4.1. qui est lisse (C^1) est aussi une solution forte.*

Preuve Proposition 2.4.1. : Le sens direct est vrai par construction. Supposons une solution faible lisse. On a par nos calculs précédents :

$$\forall \phi \in C^1\{[0, T]; C_0^1(\mathbb{R}^2)\}, \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} dx dt \phi(D_t \omega) = 0,$$

et par continuité de $D_t \omega$, on a $D_t \omega = 0$.

Nous avons donc formulé la bonne définition de solution faible. A présent, nous pouvons passer à la partie finale.

2.5 Preuve du Théorème de Yudovich

Pour cette partie, je suis la preuve du théorème p.320 du chapitre 8 de A. L. Majda et Bertozzi. Je montre le lemme en usant de la théorie des intégrales singulières.

Lemme. 2.5.1. Soit $\omega(\cdot, t) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une solution faible à l'équation d'Euler 2 dimensionnelle, de support compact $\text{supp } \omega(\cdot, t) \subset \{x : |x| \leq R(t)\}$. Alors pour tout $1 < p < \infty$, on a :

$$\|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p} \leq c(\|\omega_0\|_{L^\infty})p.$$

Preuve du Lemme. 2.5.1. : Il nous faut calculer le gradient de v . Il s'agit d'un gradient tensoriel, donc ce gradient est une matrice 2×2 . Soit $j \in \{1, 2\}$. On calcule au sens des distributions, pour $\phi \in \mathcal{D}$ en n'explicitant pas le domaine d'intégration lorsqu'il s'agit de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j v, \phi \rangle &= -\langle v, \partial_j \phi \rangle \\ &= -\int v(x, t) \partial_j \phi(x) dx \\ &= -\int \left(\int K(x-y) \omega(y, t) dy \right) \partial_j \phi(x) dx \\ &= -\int \left(\int K(x-y) \partial_j \phi(x) dx \right) \omega(y, t) dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{cB(y, \varepsilon)} K(x-y) \partial_j \phi(x) dx \right\} dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{C(y, \varepsilon)} K(x-y) \phi(x) n_j(x) d\sigma(x) \right\} dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{C(y, \varepsilon)} K(x-y) \phi(x) (x_j - y_j) / \varepsilon d\sigma(x) \right\} dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{C(0, \varepsilon)} K(z) \phi(z+y) z_j / \varepsilon d\sigma(z) \right\} dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{C(0, 1)} K(\varepsilon s) \phi(\varepsilon z + y) s_j \varepsilon d\sigma(s) \right\} dy \\ &= -\int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{C(0, 1)} K(s) \phi(\varepsilon z + y) s_j d\sigma(s) \right\} dy \\ &= \int \omega(y, t) \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{cB(y, \varepsilon)} \partial_j K(x-y) \phi(x) dx \right\} dy \\ &\quad - \int \omega(y, t) \phi(y) \left\{ \int_{C(0, 1)} K(s) s_j d\sigma(s) \right\} dy \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après justification de l'utilisation de la théorie des intégrales singulières et après avoir utilisé Fubini-Lebesgue une dernière fois, au sens des distributions :

$$\partial_j v(x, t) = \text{PV} \int \partial_j K(x - y) \omega(y, t) dy + C \omega(x, t),$$

donc :

$$\boxed{\nabla v(x, t) = \text{PV} \int \nabla K(x - y) \omega(y, t) dy + C \omega(x, t)}.$$

En notant T (une matrice) l'opérateur singulier agissant sur ω , on a :

$$\nabla v(x, t) = T(\omega(\cdot, t))(x) + C \omega(x, t),$$

ainsi par le théorème 1.7.2., par Minkowski et pour $p > 2$ assez grand :

$$\|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p} \leq (A_p + C) \|\omega(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \tilde{C} \|\omega(\cdot, t)\|_{L^p p},$$

or on a un support compact $B(0, R(T))$, donc pour un p assez grand encore :

$$\|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^p} \leq c \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty p} = c \|\omega_0\|_{L^p p},$$

le lemme est prouvé si on justifie l'utilisation du résultat issu de la théorie des intégrales singulières. Commençons par écrire ∇K :

$$\boxed{\nabla K(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2x_1 x_2}{|x|^4} & \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} \\ -\frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4} & \frac{2x_1 x_2}{|x|^4} \end{pmatrix}},$$

donc il existe une matrice constante A telle que :

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{A}{|x|^2},$$

l'idée pour utiliser le résultat que nous avons montré est de l'utiliser composante par composante, et d'utiliser Minkowski (implicitement pour alléger). La condition d'annulation est immédiate par changement de coordonnées polaires, et il ne reste qu'à regarder les écarts. Posons :

$$F(y) = \int_{|x| \geq 2|y|} |\nabla K(x - y) - \nabla K(x)| dy,$$

on sait que K est de classe C^∞ en dehors de l'origine, donc, pour $|x| \geq 2|y|$, l'élément $x - y$ est "loin" de l'origine, et on peut considérer que l'on regarde composante par composante $\tilde{K} = \nabla K_{ij}$ une fonction de classe C^∞ . On peut alors écrire :

$$\tilde{K}(x - y) - \tilde{K}(x) = - \int_0^1 y \cdot \nabla \tilde{K}(x - ty) dt,$$

et là :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |\tilde{K}(x - y) - \tilde{K}(x)| dx \leq \int_{|x| \geq 2|y|} \int_0^1 |y| |\nabla \tilde{K}(x - ty)| dt dx,$$

par Fubini-Tonelli et par majoration immédiate :

$$\int_{|x| \geq 2|y|} |\tilde{K}(x - y) - \tilde{K}(x)| dx \leq c \int_0^1 \int_{|x| \geq 2|y|} \frac{|y|}{|x - ty|^3} dx dt,$$

par des changements de variables successifs, on montre que cette dernière intégrale est homogène de degré 0 en y et radiale, donc constante, et donc on a toutes les hypothèses en rassemblant coordonnées par coordonnées et par Minkowski. Le lemme est prouvé.

Passons à la preuve du Théorème de Yudovich. Voici son énoncé, l'existence de solutions faibles peut être montrée par des estimations énergétiques délicates sur des espaces de Sobolev, ici nous faisons seulement un raisonnement *a priori* :

Théorème d'unicité de Yudovich : Soit $\omega_0 \in L_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ un tourbillon initial (vorticité) dont le support (compact) est dans $B(0, R_0)$. Alors la solution faible associée $\omega \in L^\infty\{[0, \infty[; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)\}$ est unique.

Preuve du Théorème : Nous suivons la preuve du livre. Au sens de la définition faible, nous montrons d'abord que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_0(x) dx.$$

C'est immédiat car X est une transformation qui conserve la mesure de Lebesgue. Poursuivons en voyant que la vitesse est bornée par la vorticité initiale. On a par Biot-Savart et inégalité triangulaire :

$$|v(x, t)| \leq \int_{|y| \leq 1} |K(y) \omega(x - y, t)| dy + \int_{|y| \geq 1} |K(y) \omega(x - y, t)| dy,$$

d'où :

$$|v(x, t)| \leq \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty} \int_{B(0,1)} dy/|y| + \|\omega(\cdot, t)\|_{L^1} \leq 2\pi \|\omega(\cdot, t)\|,$$

où $\|\omega(\cdot, t)\| = \|\omega(\cdot, t)\|_{L^1} + \|\omega(\cdot, t)\|_{L^\infty}$. Par conservation de la vorticité, $\|\omega(\cdot, t)\| = \|\omega_0\|$, et ainsi :

$$\boxed{\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq 2\pi \|\omega_0\|}.$$

Puisque la vorticité est conservée sur les trajectoires particulières, le support a une vitesse de propagation finie :

$$|X(\alpha, t) - X(\alpha, 0)| \leq \int_0^t |\partial_t X(\alpha, s)| ds = \int_0^t |v(X(\alpha, s), s)| ds \leq 2\pi \|\omega_0\| t,$$

et comme :

$$\text{supp } \omega(\cdot, t) \subset X(\text{supp } \omega_0, t),$$

on a :

$$\text{supp } \omega(\cdot, t) \subset B(0, R_0 + 2\pi \|\omega_0\| t) =: B(0, R(t)).$$

Ainsi, le support de $\omega(\cdot, t)$ est compact et inclus dans une boule dont le rayon croît linéairement. Pour regarder les solutions faibles, on se restreint à $[0, T]$, et par croissance ; $\text{supp } \omega(\cdot, t) \subset B(0, R(T))$. On suppose donc avoir deux solutions faibles, v_1 et v_2 avec même vorticité initiale ω_0 . Déjà, en posant $R_\infty = \max\{R_1(T), R_2(T)\}$, on sait que les deux vorticités associées aux vitesses ont leur support inclus dans $B(0, R_\infty)$ (par nos calculs, on peut prendre $R_1, R_2 = R$, puisque nous avons fait les calculs seulement à partir de la vitesse initiale, qui est commune aux deux vitesses). Grâce à cela, on montre que la différence $u = v_1 - v_2$ a une énergie finie.

Pour faire ceci, on montre une estimation asymptotique. Prenons $|y| \leq R_\infty$ et pour $|x| \geq 2R_\infty$ grand, on a :

$$|x - y|^{-2} = |x|^{-2} \left(1 - \frac{2x \cdot y}{|x|^2} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{-2} = |x|^{-2} + O(|x|^{-3}),$$

et comme on vient de le dire, les vorticités ont leur support dans le bon ensemble, donc :

$$v_j(x, t) = K(x) \int_{\mathbb{R}^2} \omega_j(y, t) dy + O(|x|^{-2}),$$

ainsi puisque l'on a montré que cette intégrale revenait à celle de la vorticité initiale, la différence les annule et donne :

$$\boxed{u(x, t) = O(|x|^{-2})},$$

et $u(\cdot, t)$ est de carré intégrable, c'est-à-dire que la particule virtuelle de vitesse u est d'énergie finie. Voyons quelle équation différentielle vérifie u :

$$\begin{aligned} \partial_t u + v_1 \cdot \nabla v_1 - v_2 \cdot \nabla v_2 &= -\nabla(p_1 - p_2) \\ \partial_t u + v_1 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla v_2 &= -\nabla(p_1 - p_2), \end{aligned}$$

Prenons le produit scalaire contre u :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t u) \cdot u + \int_{\mathbb{R}^2} (v_1 \cdot \nabla u) \cdot u + \int_{\mathbb{R}^2} (u \cdot \nabla v_2) \cdot u = - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla(p_1 - p_2) \cdot u,$$

justifier l'interversion dérivée intégrale vient d'un argument délicat de densité par régularisation de $\mathcal{D}$ dans L^2 et par utilisation du théorème de convergence dominée de Lebesgue, et par intégration par parties, comme les fluides sont incompressibles, on a :

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) + \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot \nabla v_2 \cdot u = 0}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder :

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 2 \|\nabla v_2(\cdot, t)\|_{L^p} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2p/(1-p)} \right)^{(p-1)/p} \leq 2 \|\nabla v_2\|_{L^p} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}^{2/p} E(t)^{(p-1)/p},$$

par le lemme et la borne des vitesses (avec p grand) :

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq c \|\omega_0\|_{L^\infty} p \|\omega_0\| E(t)^{1-1/p} =: p M E(t)^{1-1/p},$$

or la solution de l'EDO associée est :

$$\boxed{\overline{E}(t) = (Mt)^p},$$

un argument distributionnel de séparation des variables donne :

$$E \leq \overline{E},$$

soit T^* tel que $MT^* \leq 1/2$, à la limite :

$$E(t) \leq (1/2)^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0,$$

donc $E \equiv 0$ sur $[0, T^*]$, on vient de montrer que l'ensemble :

$$A = \{t \in [0, T] : \forall t' \in [0, t], E(t') = 0\}$$

est un ouvert non vide, or cet ensemble est fermé par construction (et densité), on conclut donc par connexité que $E \equiv 0$ sur $[0, T]$. Dès lors :

$$\boxed{v_1 \equiv v_2},$$

presque partout. Le théorème est prouvé.

A Distributions

Pour cette section, j'ai réalisé moi-même une synthèse de plusieurs livres exposants des introductions à cette théorie (cf par exemple R. Strichartz, [1] et, N. Boccara, [1]).

Dans la résolution des équations différentielles, la présence d'opérateurs dérivationnels demande classiquement aux fonctions solutions d'être différentiables une ou plusieurs fois, seulement dans l'idée, une "fonction" qui ne serait pas différentiable en certains points mais qui vérifierait l'équation différentielle "en dehors" de ces points devrait quand même être considérée comme une solution. Dans cet ordre d'idée, nous allons donner des éléments de cette incroyable théorie de Laurent Schwartz qu'est la théorie des distributions.

A.1 Fonctions tests

On se donne pour la suite un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$. On pose dans un premier temps l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. On appelle souvent ces fonctions des *fonctions tests*. Il est utile pour la suite de remarquer que l'on peut décrire cet ensemble par les supports de ses fonctions, ainsi, pour K un compact de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ ces mêmes fonctions dont le support est inclus dans K . On a alors :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \subset \mathbb{R}^n \\ K \text{ compact}}} \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Cet espace de fonctions peut être muni de la famille de semi-normes :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \eta_{k,K}(\varphi) := \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

avec K un compact de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, où en posant $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, on a défini $D^\alpha \varphi = \partial^{|\alpha|} \varphi / \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$. Cette famille confère à $\mathcal{D}(\Omega)$ la structure d'espace vectoriel localement convexe (cf F. Berteloot, [1]).

On définit la notion de convergence dans cet espace ; *On dit que (φ_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, s'il existe un compact K tel que tous les supports des fonctions φ_n soient inclus dans K et si φ_n ainsi que toutes ses dérivées convergent uniformément vers 0 sur K .* Donc (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, si $(\varphi_n - \varphi)$ converge vers 0 au sens précédent.

A.2 Distributions

Il est temps d'introduire la notion clé de cette section, les distributions. Une distribution sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Autrement dit, une distribution est un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$, le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$. Tout d'abord, pour savoir si une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, T , est continue, il est nécessaire et suffisant de vérifier (cf structure d'espace localement convexe) :

$$\exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ compact}, \exists k \in \mathbb{N}, \exists M_K > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), |T(\varphi)| \leq M_K \eta_{k,K}(\varphi).$$

Notons qu'il est équivalent de demander que T soit séquentiellement continue : si (φ_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $(T(\varphi_n))$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$. La continuité

séquentielle en 0 suffit par linéarité de T . Ainsi, si T est une distribution et si (φ_n) converge vers φ , alors $T(\varphi_n)$ converge vers $T(\varphi)$. On adopte à présent la notation associée au *crochet de dualité* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par lequel $T(\varphi)$ devient $\langle T, \varphi \rangle$.

On dira que (T_n) converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, si pour toute fonction test φ , le crochet $\langle T_n, \varphi \rangle$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. On a linéarité à gauche pour le crochet donc la convergence vers 0 suffit à nouveau pour parler de convergence vers T , en considérant $(T_n - T)$.

Il est temps de regarder ce que sont les distributions, et donc d'en donner des exemples. L'idée sous-jacente étant de ne plus considérer une fonction f comme étant la collection de ses valeurs $f(x)$ mais plutôt de s'intéresser à la *fonctionnelle* f à travers ses moyennes pondérées $\int f\varphi$. Cette nouvelle vision élargie le champ des possibles, et constitue une vision plus adaptée à notre réalité. En effet, lors d'une mesure au thermomètre par exemple, on ne peut pas considérer $T(x)$ tout simplement car la sonde de mesure n'est pas de taille nulle, on a en fait une mesure moyenne $\int T\varphi$. Cet exemple parmi tant d'autres montre la pertinence de ce point de vue. Une deuxième justification arrivera lorsque nous verrons que l'on peut associer à une fonction f une distribution $[f]$ et que cette fonctionnelle hérite de bon nombre des propriétés de f , ce qui permet de les identifier.

Des exemples. On se restreint par la suite au cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, par souci de simplicité, on note alors $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{D}$. Lors de ses travaux sur *le calcul opérationnel* au XX^e siècle, Heaviside a introduit ce qui deviendra par la suite une distribution d'importance majeure, la fonctionnelle d'Heaviside H définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle H, \varphi \rangle = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \varphi,$$

au même moment Dirac (bien que Heaviside l'avait déjà mentionnée...) introduit sa fonctionnelle toute aussi importante, la distribution de Dirac δ , définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Maintenant, pour f localement intégrable, c'est-à-dire intégrable sur tout compact, on définit sa distribution, dite régulière, associée $[f]$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle [f], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi,$$

je disais plus tôt que l'on pouvait identifier f et sa fonctionnelle, cela vient du fait que si g définit la même distribution alors :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\mathbb{R}^n} (f - g)\varphi = 0,$$

ce qui demande à f et g d'être égales presque partout, donc le symbole $[f]$ s'identifie sans risque avec f , ce que l'on fera s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté. Pour les distributions que l'on ne peut pas représenter comme une distribution régulière, on dit qu'elles sont singulières, c'est notamment le cas de δ puisque que si $\delta = [f]$, alors en considérant $g : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 f(x)$ on obtient $g(x) = 0$ presque partout, donc $f \equiv 0$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, donc on a $\varphi(0) = 0$ pour toutes fonctions tests, ce qui est bien entendu absurde. Notons par ailleurs que la fonctionnelle de Heaviside peut être vue comme la distribution régulière associée à $\chi_{(\mathbb{R}_+)^n}$.

A.3 Opérations sur les Distributions

Comme le dual d'un espace vectoriel reste un espace vectoriel, on sait additionner les distributions ainsi que les multiplier par des scalaires (en rentrant le scalaire dans l'évaluation, c'est-à-dire en le passant du côté droit du crochet). L'idée générale des opérations sur les distributions est de donner une relation du style :

$$\langle \mathcal{O}(T), \varphi \rangle = \langle T, \tilde{\mathcal{O}}(\varphi) \rangle,$$

suffisant à définir l'opération. On commence avec la multiplication par une fonction indéfiniment dérivable α :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle.$$

Cette définition est la bonne, en tant que pour une distribution régulière f on a :

$$\int (\alpha f) \varphi = \int f(\alpha \varphi),$$

ce qui permet d'écrire au passage que $\alpha[f] = [\alpha f]$ et justifie d'autant plus notre identification.

On peut maintenant définir les dérivées d'une distribution, notion la plus importante de cette théorie, L. Schwartz disait lui même qu'il s'agissait là de l'intérêt principal de cette théorie : *Une distribution est indéfiniment dérivable*. La dérivée partielle d'une distribution T est donnée par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \partial_i T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_i \varphi \rangle,$$

d'où l'on définit aussi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Là encore cette définition est la bonne ; toujours en considérant la distribution régulière f d'une fonction suffisamment différentiable, on a par Fubini-Lebesgue et par intégration par parties en posant $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \partial_i f, \varphi \rangle = - \iint dx_i d\tilde{x} f \partial_i \varphi = \int \varphi \partial_i f,$$

car le support de φ est compact, donc en réalisant l'intégration par parties le terme évalué demande à sortir du support de φ ce qui l'annule. Ainsi, $\partial_i[f] = [\partial_i f]$, et là encore, cela justifie notre identification.

B Éléments de Géométrie Différentielle

Je suis dans cette section les deux derniers chapitres du livre de Spivak (Spivak, [1]), en explicitant certaines étapes et en raccourcissant d'autres passages plus triviaux.

Nous établissons ici le **lemme de Poincaré** ainsi que le **théorème de Stokes généralisé**, ceci pour justifier des manipulations futures et notamment pour démontrer la **formule de Green**. J'utilise la **convention d'Einstein sur les indices répétés** dès que cela est possible, et sauf mention contraire.

B.1 Les tenseurs

Pour la suite de ce rapport, étant donné un espace vectoriel V de dimension n , on notera le produit cartésien k -uple de V comme V^k que l'on munit de sa structure d'espace vectoriel produit. On dit qu'une application k -linéaire $T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ est un k -tenseur sur V et on note $\mathcal{T}^k(V)$ l'espace des k -tenseurs. Cet espace est naturellement munit d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On définit le **produit tensoriel** de $S \in \mathcal{T}^k(V)$ et $T \in \mathcal{T}^l(V)$ comme le $(k+l)$ -tenseur $S \otimes T$ définit par :

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}),$$

de cette définition on comprend que l'ordre des vecteurs est important, et que ce produit n'est pas commutatif. Toutefois, le produit tensoriel reste distributif à gauche et à droite sur l'addition, associatif et se comporte comme on le souhaiterait par multiplication externe. Remarquons, pour se faire une idée, que l'espace des 1-tenseurs n'est autre que le dual de V .

Il nous faut construire une base de l'espace des k -tenseurs sur V , et cela est somme toute assez naturel. En effet, si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de V , alors en notant $(\beta^1, \dots, \beta^n)$ la base duale associée, on construit des k -tenseurs sur V comme k produits tensoriels de 1-tenseurs... Une base de $\mathcal{T}^k(V)$ n'est autre que la famille des produits tensoriels k -uple des β^i . En ce sens que :

$$\beta^{i_1} \otimes \dots \otimes \beta^{i_k}(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_k}^{j_k},$$

d'où si $w_1, \dots, w_k$ sont k vecteurs tels que $w_i = a_i^j v_j$, alors :

$$T(w_1, \dots, w_k) = a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \beta^{j_1} \otimes \dots \otimes \beta^{j_k}(w_1, \dots, w_k),$$

ainsi, il vient :

$$T = T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \beta^{j_1} \otimes \dots \otimes \beta^{j_k}.$$

Dès lors, on a $\dim \mathcal{T}^k(V) = (\dim V)^k$. Prenons une flèche $V \xrightarrow{f} W$ linéaire, on peut définir canoniquement une flèche $\mathcal{T}^k(W) \xrightarrow{f^*} \mathcal{T}^k(V)$ linéaire à son tour, définie par :

$$f^*T(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k)),$$

on a par ailleurs un bon comportement vis-à-vis du produit tensoriel, en tant que :

$$f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T.$$

On généralise maintenant l'idée de produit scalaire. Un produit scalaire sur V est un 2-tenseur sur V , symétrique, défini positif (au sens commun). Cette généralisation

est la bonne, en ce que l'on montre facilement que si T est un produit scalaire sur V audit sens, alors il existe une unique base $v_1, \dots, v_n$ de V telle que $T(v_i, v_j) = \delta_i^j$ (on dit orthonormée pour T) et ainsi, il existe un isomorphisme $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} V$ tel que :

$$f^*T = \langle, \rangle.$$

On dit maintenant qu'un k -tenseur ω est **alterné** si :

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

et on note $\Lambda^k(V)$ le sous-espace de $\mathcal{T}^k(V)$ formé par ces tenseurs. Ce sous-espace hérite naturellement d'une structure d'espace vectoriel, et la détermination de sa dimension demande d'introduire certains objets. Prenons T un k -tenseur, on définit $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$, que j'appelle l'**alterné** de T , par :

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

montrer que l'alterné d'un tenseur est bien alterné est simple puisque la signature d'une transposition est -1 , et on montre également que la flèche alternée est identitaire sur $\Lambda^k(V)$, en tant que $\mathfrak{S}_k$ est engendré par les transpositions, la signature et la propriété des tenseurs alternés s'annulant entre eux. On définit le **produit extérieur** de deux tenseurs alternés $(\omega, \eta) \in \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V)$, par :

$$\Lambda^{k+l}(V) \ni \omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta),$$

on montre également sans difficulté que $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$, et donc avec les notations de tout à l'heure, on a par exemple $\beta^i \wedge \beta^i = 0$ et le produit extérieur est aussi distributif à gauche et à droite sur l'addition, avec un bon comportement vis-à-vis de la loi externe. L'associativité n'est pas évidente. Pour la montrer, on montre, en coupant $\mathfrak{S}_{k+l}$ en plusieurs morceaux que si S est un k -tenseur d'alterné nul et T un l -tenseur, alors l'alterné de leur produit tensoriel est nul à son tour. Pour ce découpage, on prend G l'ensemble des permutations laissant invariants $k+1, \dots, k+l$ et pour obtenir l'ensemble entier, on remarque que $G \simeq \mathfrak{S}_k$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{k+l}$ et ceci nous permet de considérer l'action à droite de G sur cet ensemble. On obtient donc une décomposition suivant les classes à gauche σG . Ceci permet de prouver sans difficulté ce premier résultat. Celui-ci permet donc de montrer, sans difficulté aussi, que :

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)),$$

d'où l'on tire immédiatement l'associativité. Ainsi, de la même manière que tout à l'heure, en utilisant le caractère identitaire de l'application alternée sur les tenseurs alternés, on montre qu'une base de ce dernier espace est formée par les produits extérieurs k -uple des 1-tenseurs β^i . Comme je l'ai fait remarquer plus haut, plus d'une apparition du même 1-tenseur dans le produit extérieur l'annule, ainsi, nous comptons $\binom{n}{k}$ tels éléments distincts, soit :

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{\dim V}{k},$$

d'où l'on tire que $\dim \Lambda^n(V) = 1$, et ainsi, il existe un n -tenseur alterné, qui les engendre tous, dans le cas $V = \mathbb{R}^n$ on sait que le déterminant convient. Ici, étant donnée une base $v_1, \dots, v_n$ de V , si $\omega \in \Lambda^n(V)$ et $w_i = a_i^j v_j$ avec $A = (a_i^j)$, alors :

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n),$$

ceci se démontre en transportant $\mathbb{R}^n$ dans V au moyen d'un isomorphisme naturel $\phi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i v_i$, cela fait, on a $\eta := \omega \circ \phi \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$, ce qui suffit. Ce résultat montre qu'un n -tenseur alterné distingue les bases de V entre celles dont $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ et celles dont $\omega(v_1, \dots, v_n) < 0$. Deux bases sont donc dans le même groupe si la matrice A qui les relie a un déterminant positif, on voit que cela ne dépend pas de ω et donc on peut toujours séparer en deux groupes disjoints les bases de V , ces deux groupes sont des orientations pour V , l'orientation d'une base $v_1, \dots, v_n$ est notée $[v_1, \dots, v_n]$ et l'autre est notée $-[v_1, \dots, v_n]$. On sait pour $V = \mathbb{R}^n$ que le déterminant est la seule forme linéaire vérifiant $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$, dans le cas général il n'y a pas moyen de distinguer un ω particulier. Seulement, si (w_i) et (v_i) sont deux bases orthonormées pour un produit scalaire T sur V , alors en notant encore A la matrice de passage, on voit que $AA^T = I$, ainsi, $\det A = \pm 1$. De là, si μ est une orientation pour V , il y a un unique $\omega \in \Lambda^n(V)$ tel que $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$, dès que $v_1, \dots, v_n$ est orthonormée telle que $[v_1, \dots, v_n] = \mu$. Ce ω est appelé **l'élément de volume** de V déterminé par le produit scalaire T et l'orientation μ .

B.2 Les formes différentielles

Pour parler de champ vectoriel nous avons besoin de définir une notion d'espace dont les coordonnées dépendent d'un point. Étant donné un point $p \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble des paires (p, v) pour $v \in \mathbb{R}^n$ décrit l'espace noté $\mathbb{R}_p^n$ des vecteurs liés au point p , on appelle cet espace **l'espace tangent à p sur $\mathbb{R}^n$** . On munit cet espace des lois canoniques, notamment pour l'addition :

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w).$$

Ces lois confèrent à cet espace la structure d'espace vectoriel réel, et par commodité, nous notons par $(v)_p$, ou v_p s'il n'y a pas d'ambiguïtés, le vecteur (p, v) .

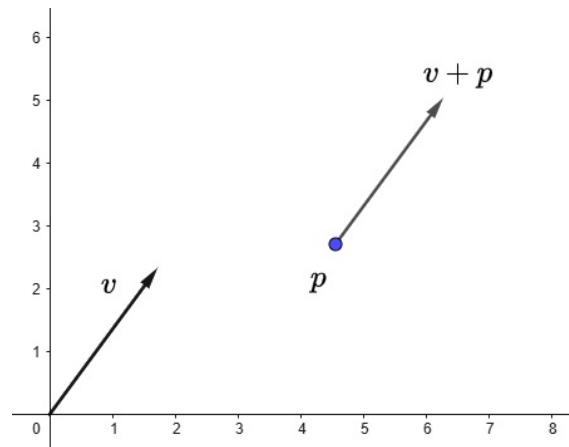


FIGURE 9 – Illustration du vecteur lié (p, v)

Cet espace tangent hérite de quasiment tout ce qu'il est possible de faire sur $\mathbb{R}^n$. Pour le produit scalaire canonique réel, on le transporte à l'espace tangent, $\langle v_p, w_p \rangle_p =$

$\langle v, w \rangle$, l'orientation canonique réelle est aussi transportée sur le tangent comme $[(e_1)_p, \dots, (e_n)_p]$. On dit qu'une fonction F telle que $F(p) \in \mathbb{R}_p^n$ est un champ de vecteurs, et pour tout p , il y a n nombres $F^1(p), \dots, F^n(p)$ tels que :

$$F(p) = F^i(p)(e_i)_p.$$

Comme souvent en mathématiques, F est différentiable, continue, etc. si ses composantes le sont. Les opérations communes sur les champ de vecteurs se passent comme

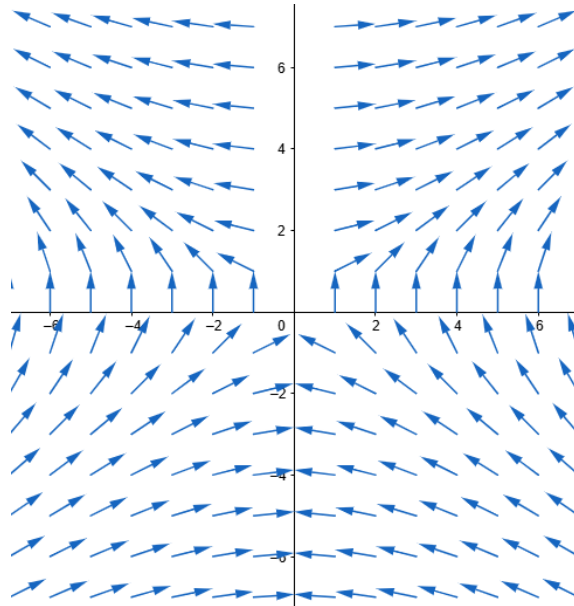


FIGURE 10 – Exemple de champ de vecteurs

le lecteur l'imagine. On définit l'opérateur divergence comme $\nabla \cdot F = D_i F^i$ et en dimension 3 on peut parler du rotationnel $\nabla \times F$ défini plus tard dans le rapport.

Nous pouvons finalement définir ce qu'est une forme différentielle. Si une fonction ω est telle que $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$, on dit que ω est une k -forme, ou une forme différentielle, sur $\mathbb{R}^n$. On voit que si $\phi^1(p), \dots, \phi^n(p)$ est duale de $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$, alors :

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) \phi^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \phi^{i_k}(p) =: \omega_{i_1, \dots, i_k}(p) \phi^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \phi^{i_k}(p),$$

pour certaines fonctions $\omega_{i_1, \dots, i_k}$ et on dit que ω est différentiable, continue, etc. si ces fonctions le sont. Dans la suite de cette section, différentiable signifiera C^∞ pour simplifier les preuves. On étend les précédentes opérations sur les tenseurs alternés aux formes différentielles. On considère une fonction f comme étant une 0-forme, et on notera le produit $f\omega$ aussi comme $f \wedge \omega$. Donnons-nous $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ différentiable, ainsi, on a $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}_p^n)$, on définit alors la 1-forme df :

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

On continue en écrivant les formes ϕ^i , duale de la base canonique (e_i) , suivant la notation usuelle dans les mathématiques modernes, je veux dire, " $x^i = \phi^i$ " (en dimension 3, on verra souvent x, y et z , pour x^1, x^2 et x^3). Cet abus de notations s'avère particulièrement pratique. Ainsi, on a :

$$dx^i(p)(v_p) = d\phi^i(p)(v_p) = D\phi^i(p)(v) = v^i,$$

et $(dx^i(p))$ n'est autre que la base duale de $((e_i)_p)$ et donc :

$$\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Toujours avec la fonction donnée plus haut, on montre facilement :

$$df = D_i f dx^i = \partial_i f dx^i.$$

Donnons-nous maintenant $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ différentiable, cela fournit une transformation linéaire $\mathbb{R}^n \xrightarrow{Df(p)} \mathbb{R}^m$ et celle-ci nous permet de définir une autre transformation linéaire $\mathbb{R}_p^n \xrightarrow{f_*} \mathbb{R}_{f(p)}^m$ définie par :

$$f_*(v_p) := (Df(p)(v))_{f(p)},$$

et celle-là même induit une dernière transformation linéaire $\Lambda^k(\mathbb{R}_{f(p)}^m) \xrightarrow{f^*} \Lambda^k(\mathbb{R}_p^n)$ par un procédé déjà explicité plus haut. Grâce à cette dernière, à partir d'une k -forme sur $\mathbb{R}^m$ on peut définir une k -forme sur $\mathbb{R}^n$ avec $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(f(p)))$. On a les résultats suivants : f^* est linéaire, compatible avec le produit extérieur, vérifie $f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega$ et $f^*(dx^i) = D_j f^i dx^j$. Ces résultats se montrent sans problème en utilisant les définitions. De même, on montre aisément, lorsque $m = n$, que :

$$f^*(h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (g \circ f)(\det f') dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

On généralise alors l'opérateur d aux formes, celui-ci changera une 0-forme en 1-forme, etc. Soit une k -forme ω . On définit la $(k+1)$ -forme $d\omega$ par :

$$d\omega = d\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = D_\alpha \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

la somme portant sur α allant de 1 à n . D'après le lemme de Schwartz, l'opérateur d est nilpotent d'ordre 2, il est aussi linéaire, compatible avec f^* et on a $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$. Seules les deux dernières formules méritent une brève explication ; la première est démontrée par récurrence, la seconde est vraie pour les éléments de la base, puis on conclut par sommation.

B.3 Le lemme de Poincaré

On arrive au bout de nos efforts sur les formes. On dit qu'une forme ω est **fermée** si $d\omega = 0$ et qu'elle est **exacte** s'il existe η telle que $\omega = d\eta$. Par nilpotence, toute forme exacte est fermée. Une question qu'il est légitime de se poser est de savoir si une forme fermée est alors exacte. Cette question a une réponse positive dans le cadre des domaines étoilés, c'est l'objet du lemme de Poincaré.

Prenons le cas d'une 1-forme sur le plan réel, $\omega = Pdx + Qdy$, dans ce cas, $d\omega = (\partial_1 Q - \partial_2 P)dx \wedge dy$, donc si ω est fermée, alors il faut $\partial_1 Q = \partial_2 P$. Dans ce cas-là, on montre qu'on peut trouver une fonction¹ f telle que $\omega = df = \partial_1 f dx + \partial_2 f dy$. Toutefois, si l'on travaille seulement dans un ouvert du plan, cette fonction pourrait ne pas exister. Examinons le problème. Supposons que l'on ait une telle fonction, on peut, quitte à traduire, supposer que f s'annule en 0. On a (le segment est compact) :

$$f(x) = \int_0^1 \partial_t f(tx) dt = \int_0^1 \partial_i f(tx) x^i dt = \int_0^1 \omega_i(tx) x^i dt,$$

1. $f(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt$

ce calcul suggère que pour trouver f , il faut considérer l'opérateur I défini par :

$$I\omega(x) = \int_0^1 \omega_i(tx) x^i dt,$$

et cette définition demande au passage au domaine considéré d'être étoilé par rapport à 0.

Lemme de Poincaré. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à 0, alors toute forme fermée sur A est aussi exacte.*

Preuve du Lemme de Poincaré : La preuve est technique et je détaille ainsi tout ce qui est nécessaire. Soit $\omega = \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Posons, puisque A est étoilé, l'opérateur suivant :

$$I\omega(x) = \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

et montrons que $\omega = I(d\omega) + d(I\omega)$. Calculons le second terme :

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt dx^{i_\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt (-1)^{\alpha-1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\alpha} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= k \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned},$$

d'un autre côté, nous avons :

$$d\omega = \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

ainsi, en appliquant I à la $(k+1)$ -forme $d\omega$:

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{\alpha=2}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= - \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned},$$

et lorsque l'on additionne les deux, les deux triple sommes s'annulent et il reste :

$$\begin{aligned}
d(I\omega) + I(d\omega) &= \int_0^1 t^k \partial_j \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&\quad + k \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \int_0^1 \partial_t (t^k \omega_{i_1, \dots, i_k}(tx)) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\
&= \omega
\end{aligned}$$

dans notre cas, on a une forme fermée, donc le second terme du membre de gauche s'annule, et ainsi :

$$\omega = d(I\omega),$$

et ω est exacte ! En conclusion, sur les domaines étoilés par rapport à 0, il y a équivalence entre être fermée et être exacte pour les formes différentielles.

B.4 Calculs sur des chaînes

Nous allons maintenant définir ce que sont des n -chaînes singulières, pour nous permettre de définir l'intégration de formes sur des variétés pour ensuite généraliser des résultats à celles-ci.

On appelle **n -cube singulier**, sur $A \subset \mathbb{R}^n$, est une application continue $[0, 1]^n \xrightarrow{c} A$. On a coutume de définir le produit 0-uple de la droite réelle ou du segment $[0, 1]$ comme le singleton $\{0\}$, ainsi, un 0-cube singulier est un point de A . Remarquons, pour fixer les idées, qu'un 1-cube est une courbe dans A , etc. On appelle une **n -chaîne singulière** dans A une combinaison linéaire (fonctionnelle) de n -cubes.

Considérons une n -chaîne c sur A , on définit alors un opérateur ∂ qui envoie une n -chaîne singulière sur une $(n-1)$ -chaîne singulière, une fois appliqué à c , on dit que ∂c est la **frontière** de c , pour définir formellement cet opérateur, on pose les notations suivantes : On note I^k le **k -cube standard** défini comme étant l'identité sur le cube $[0, 1]^k$ et pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, on note

$$\forall x \in [0, 1]^{k-1}, I_{(i, \varepsilon)}^k(x) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \varepsilon, x^i, \dots, x^{k-1}),$$

qu'on appelle la (i, ε) -face de I^k . On définit alors ∂ sur I^k par :

$$\partial I^k = \sum_{\varepsilon=0,1} (-1)^{i+\varepsilon} I_{(i, \varepsilon)}^k,$$

par exemple, ∂I^2 est la somme de quatre 1-cubes singuliers :

$$\partial I^2 = -I_{(1,0)}^2 + I_{(1,1)}^2 + I_{(2,0)}^2 - I_{(2,1)}^2$$

et on étend cette définition à tous les k -cubes par :

$$c_{(i, \varepsilon)} = c \circ I_{(i, \varepsilon)}^k, \text{ d'où : } \partial c = \sum_{\varepsilon=0,1} (-1)^{i+\varepsilon} c_{(i, \varepsilon)},$$

on montre par ailleurs sans problème la remarquable identité :

$$\partial^2 = 0.$$

Ceci suggère un lien fort entre les opérateurs d et ∂ !

Suite à compléter

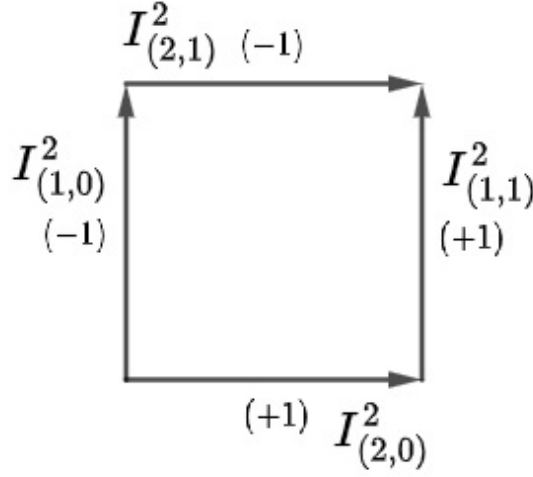


FIGURE 11 – ∂I^2

B.5 Calcul sur des variétés

Sous-section à compléter

B.6 Applications

On commence cette section par prouver que le divergent d'un rotationnel et le rotationnel d'un gradient sont deux quantités nulles. Pour se faire, posons les formes, en dimension 3 et pour un champ vectoriel F :

$$\begin{cases} \omega_F^1 &= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz \\ \omega_F^2 &= F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \end{cases} ,$$

Pour une fonction f à valeurs réelles, on a

$$df = \partial_i f dx^i \triangleq \omega_{\nabla f}^1,$$

pour un champ de vecteurs F on a :

$$\begin{aligned} d(\omega_F^1) &= \partial_2 F^1 dy \wedge dx + \partial_3 F^1 dz \wedge dx \\ &\quad + \partial_1 F^2 dx \wedge dy + \partial_3 F^2 dz \wedge dy \\ &\quad + \partial_1 F^3 dx \wedge dz + \partial_2 F^3 dy \wedge dz \\ &= (\partial_2 F^3 - \partial_3 F^2) dy \wedge dz \\ &\quad + (\partial_3 F^1 - \partial_1 F^3) dz \wedge dx \\ &\quad + (\partial_1 F^2 - \partial_2 F^1) dx \wedge dy \\ &\triangleq \omega_{\nabla \times F}^2 \end{aligned} ,$$

et :

$$d(\omega_F^2) = (\partial_1 F^1 + \partial_2 F^2 + \partial_3 F^3) dx \wedge dy \wedge dz \triangleq (\nabla \cdot F) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Ainsi, on peut directement montrer :

$$\omega_{\nabla \times (\nabla f)}^2 = d(\omega_{\nabla f}^1) = d^2(f) = 0, \text{ et, } (\nabla \cdot (\nabla \times F)) dx \wedge dy \wedge dz = d(\omega_{\nabla \times F}^2) = d^2(\omega_F^1) = 0,$$

par nilpotence. D'où par définition :

$$\boxed{\nabla \times (\nabla f) = 0}, \text{ et, } \boxed{\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0}.$$

Par ailleurs, cette façon de raisonner montre, par une application immédiate du lemme de Poincaré, donc sur les domaines étoilés et pour des fonctions suffisamment régulières (continûment dérivables), que les champs de vecteurs solénoïdaux (à divergence nulle) sont des rotationnels et que les champs de vecteurs irrotationnels (à rotationnel nul) sont des gradients. Nous aurons besoin d'une telle écriture pour des fonctions dont la régularité n'est pas aussi bonne, donc ce point de vue ne suffit pas et nous essaierons d'étendre ces résultats par densité.

Plaçons nous donc dans un espace étoilé A , supposons d'abord que F est solénoïdal ; on sait par nos calculs que ω_F^2 est fermée donc par Poincaré il existe une 1-forme η telle que :

$$\omega_F^2 = d\eta,$$

on écrit, par définition d'une 1-forme dans un espace à 3 dimensions :

$$\eta = G^1 dx + G^2 dy + G^3 dz,$$

dès lors par définition encore :

$$\omega_F^2 = d\eta = d(G^1 dx + G^2 dy + G^3 dz) \triangleq d(\omega_G^1) = \omega_{\nabla \times G}^2,$$

et par définition encore, on égalise les coefficients par unicité :

$$\boxed{F = \nabla \times G},$$

où l'on a formé le champ G canoniquement.

Prenons maintenant F irrotationnel. Encore par nos calculs nous savons que ω_F^1 est fermée, donc par Poincaré, il existe cette fois une 0-forme f telle que :

$$\omega_F^1 = df = \omega_{\nabla f}^1,$$

donc encore en identifiant les composantes par unicité, on a :

$$\boxed{F = \nabla f}.$$

Bibliographie - Toutes versions

E. Stein

[1] *"Singular Integrals and Differentiability properties of Functions"*, Princeton University Press, New Jersey, 1970

A. L. Majda, A. L. Bertozzi

[1] *"Vorticity and incompressible flow"*, Cambridge University Press, 2002

R. Strichartz

[1] *"A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms"*, CRC Press, 1994

F. Berteloot

[1] *"Cinq Leçons d'analyse fonctionnelle"*, Ellipses, 2017

N. Boccara

[1] *"Distributions"*, Ellipses, 1997

F. Trèves

[1] *"Basic Linear Partial Differential Equations"*, Academic Press, 1975

M. Spivak

[1] *"Calculus on Manifolds"*, Westview Press, 1965

C. Marchioro, M. Pulvirenti

[1] *"Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids"*, Springer-Verlag, 1994

R. Temam

[1] *"Navier-Stokes Equations : Theory and numerical analysis"*, AMS Chelsea, 2001

P. Constantin, C. Foias

[1] *"Navier-Stokes Equations"*, Chicago Lectures in Mathematics, 1951

C. Villani

[1] *"A review of mathematical topics in collisional kinetic theory"*, Handbook of Mathematical of Fluid Dynamics, S. Friedlander, D. Serre, Vol. I, Chap. 2, 2002

J. L. Lions

[1] *"Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles"*, presse de l'université de Montreal, 1965

[2] *"Problèmes aux limites non homogènes et applications"*, Dunod, Paris, 1968 – 1970

F. Boyer, P. Fabrie

[1] *"Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models"*, Springer, New York, 2013

G. P. Galdi

[1] *"An introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. I, Linearised Steady Problems"*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 38, 1991

L. Hörmander

[1] *"The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis"*, Springer-Verlag, Berlin, 1980

A. Lesfari

[1] *"Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace - Cours et exercices"*