

Théorème de Tarski-Seidenberg par la méthode de Łojasiewicz

BONFILS Pierre

3 juillet 2025

Résumé

Ce rapport constitue une courte introduction à la géométrie semi-algébrique et une preuve du théorème de Tarski-Seidenberg dû à Łojasiewicz, qui vise à montrer que la projection d'un semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est un semi algébrique de $\mathbb{R}^n$.

La preuve originelle de Tarski montre également la décidabilité de la théorie du premier ordre des réels, car cette preuve est un procédé algorithmique d'élimination des quantificateurs.

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Algèbre booléenne	3
1.2	Semi-algébriques	4
1.3	E-sets	5
1.4	Exemples de semi-algébriques	5
1.5	Stabilité par projection	7
2	Résultats intermédiaires	8
2.1	Quelques résultats topologiques	8
2.2	Localisation des racines	9
2.3	Sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}$	12
2.4	Continuité des racines	14
2.5	Cas particulier du théorème de Chevalley	16
3	Le Théorème de Tarski-Seidenberg par la méthode de Łojasiewicz	19
3.1	Théorème central	19
3.2	Propriété de Łojasiewicz et corollaire	21

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Algèbre booléenne

Définition 1.1 (Algèbres booléennes). *Une algèbre booléenne d'un ensemble X est une collection $\mathcal{C}$ de sous ensembles de X non vide tel que si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \cup B \in \mathcal{C}$ et $A^C \in \mathcal{C}$.*

Remarque 1.2. On note de plus que avec cette définition, $X \in \mathcal{C}$ et $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $A \cap B \in \mathcal{C}$ pour tout $A, B \in \mathcal{C}$.

Démonstration. Sachant que $\mathcal{C}$ est non vide, il existe $A \in \mathcal{C}$ alors $A^C \in \mathcal{C}$ et $X = A \cup A^C \in \mathcal{C}$. Ensuite, $X^C = \emptyset \in \mathcal{C}$ et finalement $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{C}$. $\square$

Exemple 1.3. *On peut noter que la collection de toutes les parties de X forme une algèbre booléenne.*

Lemme 1.4. *Soit X un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que :*

$\forall A, B \in \mathcal{F}$, on a :

- 1. $A \cap B \in \mathcal{F}$*
- 2. A^C est union finie d'éléments appartenant à $\mathcal{F}$.*

Alors les unions finies d'éléments appartenant à $\mathcal{F}$ forment une algèbre booléenne.

Démonstration. Posons Ω l'ensemble des unions finies d'éléments de $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Omega$ tel que :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ et } \mathcal{B} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

où I et J sont finis et $\mathcal{A}_i \in \mathcal{F} \quad \forall i \in I \cup J$.

Alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \bigcup_{i \in I \cup J} \mathcal{A}_i$ et $I \cup J$ reste fini donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \Omega$.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}^C \in \Omega$.

$$\mathcal{A}^C = \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \right)^C = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i^C$$

On a par la deuxième hypothèse que chaque $\mathcal{A}_i^C$ est union d'un nombre fini de termes appartenant à $\mathcal{F}$.

Supposons que toutes les unions ont le même nombre de termes, quitte à répéter des termes pour certains $\mathcal{A}_i^C$, on a alors que $\forall i \in I$:

$$\mathcal{A}_i^C = \bigcup_{j \in J} \mathcal{A}_{i,j}$$

où $\mathcal{A}_{i,j} \in \mathcal{F} \quad \forall i, j \in I \times J$.

On a alors :

$$\mathcal{A}^C = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \mathcal{A}_{i,j} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_{i,j}$$

or d'après la première hypothèse, $\forall j \in J, \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_{i,j} \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{A}^C$ est bien union d'éléments de $\mathcal{F}$ et donc appartient à Ω . $\square$

Exemple 1.5 (constructibles de $\mathbb{C}^n$). *On appelle constructibles de $\mathbb{C}^n$ les unions finies d'ensemble de la forme :*

$$\{x \in \mathbb{C}^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_r(x) = 0, Q(x) \neq 0\}$$

où $P_1, \dots, P_r, Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Les constructibles forment une algèbre booléenne.

Démonstration. Soit $A = \{x \in \mathbb{C}^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_r(x) = 0, Q_1(x) \neq 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{C}^n \mid R_1(x) = 0, \dots, R_l(x) = 0, Q_2(x) \neq 0\}$, on a que :

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{C}^n \mid P_1(x) = 0, \dots, P_r(x) = 0, R_1(x) = 0, \dots, R_l(x) = 0, Q(x) \neq 0\}$$

où $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

L'autre point du lemme 1.4 se vérifie facilement alors on a que les constructibles forment une algèbre booléenne. $\square$

1.2 Semi-algébriques

Définition 1.6 (semi-algébriques). *Un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant une combinaison booléenne d'équations et d'inégalités polynomiales à coefficients réels.*

On va pouvoir caractériser de manière plus simple les semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$

Proposition 1.7. *Tout sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une union finie d'ensemble de la forme :*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\}$$

où $P, Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. Notons Ω l'ensemble des unions finies de la forme :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\}$$

et $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$.

Il est clair que $\Omega \subseteq \mathcal{A}$ car chaque élément de Ω est une combinaison booléenne d'équations et d'inéquations.

Montrons que $\mathcal{A} \subseteq \Omega$.

On remarque que les sous ensembles de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant une seule équation ou inéquation appartiennent à Ω .

Il suffit alors de montrer que Ω est une algèbre booléenne.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\}$.

Soit $X, Y \in \mathcal{F}$ où $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_1(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0\}$ et

$Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_2(x) = 0, R_1(x) > 0, \dots, R_s(x) > 0\}$.

On a que :

$$X \cap Y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_r(x) > 0, R_1(x) > 0, \dots, R_s(x) > 0\}$$

où $P = P_1^2 + P_2^2$ (ce qui permet de traduire le "et").

On a par ailleurs que :

$$X^C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid -P(x) > 0\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq r} (\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_i(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid -Q_i(x) > 0\})$$

Alors X^C est union fini d'éléments de $\mathcal{F}$ donc d'après le lemme 1.4, on a que Ω est une algèbre booléenne donc $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ et finalement :

$$\mathcal{A} = \Omega$$

□

1.3 E-sets

Dans la suite du rapport, X désigne un espace métrique non vide et E un anneau de fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ où les opérations sont les opérations usuelles sur un anneau de fonctions (addition et multiplication).

Définition 1.8 (E-set). *Soit X un espace métrique.*

On dit que $A \subseteq X$ est un E-set si A est une union finie d'ensembles de la forme :

$$\{x \in X : f(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\}$$

où $f, g_1, \dots, g_k \in E$

Exemple 1.9 (semi-algébriques). *Si on prend $X = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ alors on obtient que les semi-algébriques sont des $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ -set.*

Remarque 1.10. On peut noter que $(X \times \mathbb{R}, E[T])$ satisfait aussi les conditions imposées à (X, E) , où $X \times \mathbb{R}$ est le produit topologique de X et $\mathbb{R}$ et

$$f(T) = f_0 + f_1 T + \dots + f_d T^d \in E[T]$$

est interprété comme la fonction continue

$$(x, t) \rightarrow f_0(x) + \dots + f_d(x)t^d.$$

1.4 Exemples de semi-algébriques

Nous allons dans cette sous-section donner quelques exemples de semi-algébriques pour mieux comprendre la notion que nous manipulons.

Exemple 1.11 (disque unité de $\mathbb{R}^2$). *Le disque unité de $\mathbb{R}^2$ est un semi-algébrique, il est donné par la formule $x^2 + y^2 = 1$.*

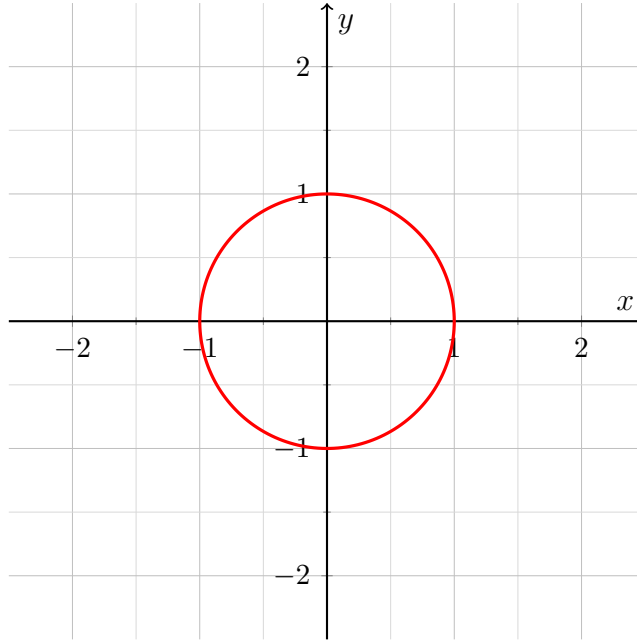


FIGURE 1.1 – $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Si on veut reprendre la définition, on a :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\} \quad \text{où} \quad P(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$$

Exemple 1.12 (Paraboloïde). *Cette surface est obtenue en faisant tourner une parabole autour de l'axe $\vec{z}$.*

Elle a pour équation :

$$z = x^2 + y^2$$

Et c'est donc un semi algébrique de $\mathbb{R}^3$.

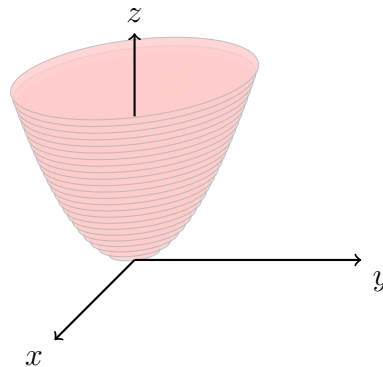


FIGURE 1.2 – $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$.

Exemple 1.13. On a vu que les semi-algébriques étaient des unions finies d'ensemble de la forme :

$$\{x \in X : f(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\}$$

alors on peut considérer une union comme par exemple :

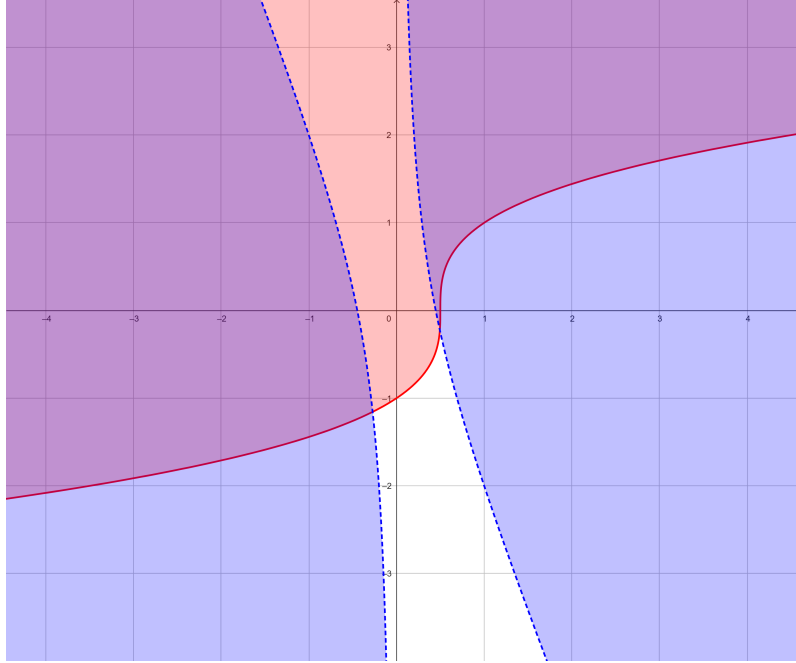


FIGURE 1.3 – $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq x^3 + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 2xy - 1 > 0\}$.

La partie en rouge représente le premier ensemble et celle en bleu le deuxième et ce qui est en violet l'intersection des deux. Étant donné que $\mathcal{A}$ est l'union des deux il est représenté par l'union des trois couleurs et c'est un semi-algébrique de $\mathbb{R}^3$.

1.5 Stabilité par projection

On est amené à se demander si la projection selon les n premières coordonnées d'un semi algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ reste un semi algébrique dans $\mathbb{R}^n$.

Revenons à l'exemple 1.11 et regardons ce qu'il se passe.

Si on regarde la projection selon la première coordonnée, on a :

$$\Pi(\mathcal{C}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\} = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\}$$

qui est donc un semi-algébrique de $\mathbb{R}$ (car donné par une équation polynomiale).

Nous allons voir que c'est tout le temps vrai.

Théorème 1.14 (Tarski-Seidenberg). Prenons $n \geq 1$, soit A un semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Alors $\Pi(A)$ est semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$.

L'objet du chapitre 3 est de présenter une preuve de ce théorème.

Chapitre 2

Résultats intermédiaires

Pour montrer le théorème de Tarski-Seindenberg, nous allons commencer par montrer plusieurs résultats intermédiaires.

2.1 Quelques résultats topologiques

Lemme 2.1. *Soit X et Y deux espaces métriques tel que Y compact.
Soit $f : X \rightarrow Y$ tel que le graphe de f noté $\Gamma(f)$ est fermé.
Alors f est continue.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ tel que $x_n \rightarrow x \in X$, on veut montrer que $f(x_n) \rightarrow f(x)$.
Supposons par l'absurde que $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$.
Cela implique qu'il existe une sous-suite de $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour un certain ε :

$$d_Y(f(x_{\phi(n)}) - f(x)) > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $(f(x_{\phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \in Y$ qui est compact donc admet une sous suite convergente :

$$f(x_{\phi \circ \psi(n)}) \rightarrow y \in Y$$

De plus,

$$(x_{\phi \circ \psi(n)}, f(x_{\phi \circ \psi(n)})) \rightarrow (x, y) \in \Gamma_f$$

On a donc que $y = f(x)$ car le graphe est fermé et donc à partir d'un certain rang n_o , on a :

$$d_Y(f(x_{\phi \circ \psi(n)}) - f(x)) < \varepsilon$$

Ce qui est absurde.

Donc f est continue. □

Lemme 2.2. Soit C un connexe de X métrique et $f, g : C \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in C, f(x) < g(x)$ alors :

1. le graphe $\Gamma(f)$ est une partie connexe de $X \times \mathbb{R}$.
2. La bande (f, g) définie par $(f, g) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < t < g(x)\}$ est une partie connexe de $X \times \mathbb{R}$.
3. La bande (f, ∞) définie par $(f, \infty) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) < t\}$ est une partie connexe de $X \times \mathbb{R}$.
4. La bande $(-\infty, f)$ définie par $(-\infty, f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid t < f(x)\}$ est une partie connexe de $X \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Commençons par montrer le premier point.

Prenons $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soit $\phi : \Gamma(f) \rightarrow \{0, 1\}$ continue, il s'agit de montrer que ϕ est constante.

Considérons :

$$\begin{aligned} \psi : C &\longrightarrow \Gamma_C(f) &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto (x, f(x)) &\longmapsto \phi((x, f(x))) \end{aligned}$$

Alors ψ est continue car c'est une composée de fonctions continues et est définie sur C connexe donc ψ est constante ce qui implique qu'il existe $K \in \{0, 1\}$ tel que $\psi(x) = K$ pour tout $x \in C$.

On a aussi que $x \rightarrow (x, f(x))$ est surjective dans $\Gamma(f)$, alors on a que $\phi(x) = K$ pour tout $x \in \Gamma(f)$ ce qui prouve que $\Gamma(f)$ est connexe.

Montrons maintenant le deuxième point.

Soit $f, g : C \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Prenons $\phi : (f, g) \rightarrow \{0, 1\}$ continue et on veut montrer que ϕ est constante.

Pour commencer, on fixe $x \in C$ et on regarde :

$$\begin{aligned} \phi_x :]f(x), g(x)[&\longrightarrow \{0, 1\} \\ y &\longmapsto \phi(x, y) \end{aligned}$$

cette fonction est continue et définie sur un intervalle qui est un connexe de $\mathbb{R}$ donc elle est constante.

Alors pour tout $x \in C$, il existe $K_x \in \{0, 1\}$ tel que pour tout y , $\phi_x(y) = K_x$.

Il reste alors à montrer que cette constante ne dépend pas de x .

Considérons :

$$\begin{aligned} i : C &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \phi((x, \frac{f(x)+g(x)}{2})) \end{aligned}$$

i est continue par composition de continue et défini sur C connexe donc constante donc $i(x) = K$ pour tout $x \in C$ d'où $K_x = K$ pour tout $x \in C$.

Cela nous permet de conclure en disant que $\phi = K$ et donc (f, g) est connexe de $X \times \mathbb{R}$.

Pour montrer que (f, ∞) et $(-\infty, g)$ sont des connexes de $X \times \mathbb{R}$, on s'y prend de manière analogue. $\square$

2.2 Localisation des racines

Dans cette section, nous allons montrer un lemme important 2.4 qui vise à montrer que lorsque deux polynômes sont "proches" au sens topologique alors leurs racines restent elles aussi proches.

Soit $c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

Pour la suite, on posera $\gamma : t \rightarrow c + re^{2\pi it}$ l'application qui parcourt le cercle C défini par $|z - c| = r$ et on note D le disque ouvert $D(c, r)$.

Lemme 2.3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur le cercle C où $P(X) = \alpha \prod (X - a_i)^{\mu_i}$
On a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{a_i \in D} \mu_i$$

(i.e. l'expression faisant intervenir l'intégrale est égale au nombre de racines de P comptées avec multiplicités dans le disque ouvert D).

Démonstration. Commençons d'abord par montrer que :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum \frac{\mu_i}{X - a_i}$$

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur le nombre de racines distinctes de P :

Si le nombre de racines distinctes de P est 1 alors $P(X) = \alpha(X - a_i)^{\mu_i}$ et $P'(X) = \alpha\mu_i(X - a_i)^{\mu_i-1}$ et donc on a bien

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X - a_i}$$

Maintenant supposons le résultat vrai pour tout polynôme admettant k racines distinctes et P admet $k + 1$ racines distinctes. Soit a_{i_0} une racine de P alors $P = (X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}} Q(X)$, on a :

$$P'(X) = \mu_{i_0}(X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}-1}Q(X) + (X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}}Q'(X)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{P'(X)}{P(X)} &= \frac{\mu_{i_0}(X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}-1}Q(X) + (X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}}Q'(X)}{(X - a_{i_0})^{\mu_{i_0}}Q(X)} \\ &= \frac{\mu_{i_0}}{(X - a_{i_0})} + \frac{Q'(X)}{Q(X)} \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à Q étant donné qu'il a k racines distinctes, ce qui donne

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{\mu_{i_0}}{(X - a_{i_0})} + \sum_{i \neq i_0} \frac{\mu_i}{X - a_i} = \sum \frac{\mu_i}{X - a_i}$$

On a alors que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum \frac{\mu_i}{z - a_i} dz = \sum \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_i}{z - a_i} dz$$

Or

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu_i}{z - a_i} dz = \mu_i \text{Ind}(\gamma, a_i)$$

On a que $\text{Ind}(\gamma, a_i) = 1$ quand $a_i \in D$ et 0 sinon.

Cela nous permet alors de conclure que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \sum_{a_i \in D} \mu_i$$

□

Lemme 2.4 (Localisation des racines). *Soient $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur C .*

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout polynôme $g(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_dX^d \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $|a_i - b_i| < \varepsilon$ pour tout i , le polynôme g ne s'annule pas non plus sur C , et possède exactement le même nombre de racines que f dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$, comptées avec leurs multiplicités.

Démonstration. Commençons par trouver un $\varepsilon > 0$ tel que si $|a_i - b_i| < \varepsilon$ alors $\forall z \in C$ on ait $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Soit $z \in C$:

$$\begin{aligned} |(f - g)(z)| &= \left| \sum (a_i - b_i)z^i \right| \\ &< \varepsilon \sum |z|^i \\ &< \varepsilon \sum (|r| + |c|)^i \end{aligned}$$

On pose alors $\varepsilon = \min_{z \in C} |f(z)| / \sum (|r| + |c|)^i$, et alors on a bien que $\forall z \in \gamma$,

$$|(f - g)(z)| < |f(z)| \quad (\mathbf{i})$$

Cela nous permet déjà de dire que g ne s'annule pas sur γ (sinon on aurait un $z_0 \in C$ tel que $|f(z_0)| < |f(z_0)|$).

Nous allons maintenant montrer que f et g ont le même nombre de racines dans D

Considérons $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, d'après **(i)**, on a que pour tout $z \in \gamma$:

$$|h(z) - 1| < 1.$$

Ce qui implique que le lacet $h \circ \gamma$ est à valeurs dans $B(1, 1)$.

On a alors que d'une part :

$$\text{Ind}(h \circ \gamma, 0) = 0.$$

Car le lacet $h \circ \gamma$ ne peut pas "s'enrouler autour de 0" étant donné qu'il est à valeurs dans $B(1, 1)$.

D'autre part :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{h \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Ind}(h \circ \gamma, 0).$$

Donc :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = 0$$

D'un autre côté, on a que :

$$\begin{aligned}\frac{h'}{h} &= \frac{g'f - gf'f}{f^2 g} \\ &= \frac{g'f - gf'}{fg} \\ &= \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Alors d'après le lemme que l'on a montré précédemment, cela nous donne le résultat voulu. $\square$

Remarque 2.5. On vient ici de montrer un cas particulier du théorème de Rouché où l'on se restreint à des polynômes.

2.3 Sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}$

Lemme 2.6 (Lemme de Thom). *Soit $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls tel que, pour tout $P'_i \neq 0$, on a $P'_i \in \{P_1, \dots, P_k\}$ (*)*
Pour $\varepsilon : [1, k] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, on pose :

$$A_{\varepsilon} = \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(P_i(t)) = \varepsilon(i), \forall i \in [1, k]\}$$

Alors A_{ε} est un connexe de $\mathbb{R}$ c'est à dire un intervalle.

Démonstration. Montrons la proposition en fonctionnant par récurrence sur k le nombre de polynômes dans la famille $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_k\}$.

Initialisation avec k=1 :

$\mathcal{F} = \{P_1\}$ alors $P_1 = K$ une constante car si $P'_1 \neq 0$ alors $P'_1 \in \mathcal{F}$ donc $P'_1 = P_1$ et ce n'est pas possible.

Soit $\varepsilon : \{1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

On a :

$$\begin{aligned}A_{\varepsilon} &= \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(P_1(t)) = \varepsilon(1)\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(K) = \varepsilon(1)\}\end{aligned}$$

Alors $A_{\varepsilon} \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ donc c'est bien un connexe de $\mathbb{R}$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang k :

Prenons $\mathcal{F} = \{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ qui respecte (*) et $\varepsilon : [1, k+1] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$,

Supposons que $\mathcal{F}$ soit ordonné par le degré de façon à ce que P_{k+1} ne soit la dérivée d'aucun polynôme alors $\mathcal{F}' = \{P_1, \dots, P_k\}$ respecte toujours (*) et

$$A_{\varepsilon'} = \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(P_i(t)) = \varepsilon'(i), \forall i \in [1, k]\}$$

est bien un connexe de $\mathbb{R}$ d'après l'hypothèse de récurrence où $\varepsilon' = \varepsilon \upharpoonright_{[1,k]}$

On a aussi que

$$A_\varepsilon = A_{\varepsilon'} \cap \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(P_{k+1}) = \varepsilon(k+1)\}$$

Alors si $A_{\varepsilon'}$ est vide ou un singleton, la proposition est validée.

Il nous reste à traiter le cas où $A_{\varepsilon'}$ est un intervalle non trivial.

1er cas :

$\deg(P_{k+1}) = 0$ alors dans ce cas tous les polynômes sont des constantes et alors par le même argument que l'initialisation, $A_\varepsilon \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ et donc la proposition est validée.

2ème cas :

$\deg(P_{k+1}) > 0$ alors $P'_{k+1} \in \mathcal{F}'$ donc P'_{k+1} est de signe constant sur $A_{\varepsilon'}$ ce qui veut dire que P_{k+1} est monotone sur $A_{\varepsilon'}$ donc pour chaque $\varepsilon(k+1) \in \{-1, 0, 1\}$,

$$A_\varepsilon = A_{\varepsilon'} \cap \{t \in \mathbb{R} : \text{sign}(P_{k+1}) = \varepsilon(k+1)\}$$

est un intervalle. □

Remarque 2.7. On peut déduire de cette proposition que les semi-algébriques de $\mathbb{R}$ sont exactement les unions finies d'intervalles.

Démonstration. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des semi-algébriques de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$.

L'objectif est d'établir que $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

Montrons d'abord que $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$:

Soit $]a, b[\in \mathcal{D}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\{x\} \in \mathcal{D}$ un singleton de $\mathbb{R}$, on a que :

$$]a, b[= \{t \in \mathbb{R} \mid P(t) < 0\} \quad \text{où} \quad P = (X - a)(X - b)$$

et

$$\{x\} = \{t \in \mathbb{R} \mid Q(t) = 0\} \quad \text{où} \quad Q = X - x$$

On remarque aussi que :

$$]-\infty, a[= \{t \in \mathbb{R} \mid Q(t) < 0\} \quad \text{où} \quad Q = X - a$$

Ainsi, tous les intervalles ouverts et les singletons sont dans $\mathcal{A}$ et plus généralement toutes les unions finies d'intervalles sont dans $\mathcal{A}$.

On a alors que $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$

Montrons maintenant que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$ un semi-algébrique, alors par la proposition 1.7, $\mathcal{S}$ est une union finie d'ensemble de la forme :

$$\mathcal{S}_i = \{t \in \mathbb{R} \mid p_0(t) = 0, p_1(t) > 0, \dots, p_n(t) > 0\}$$

Considérons la famille des polynômes intervenant dans $\mathcal{S}_i$ que l'on complète avec les dérivées successives de chaque polynôme.

$$\mathcal{F} = \{p_0, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_N\}$$

On va donc pouvoir utiliser le lemme de Thom sur cette famille qui respecte la condition de dérivation.

L'idée est que l'on a une condition de signe que sur les n premiers polynômes donc on va devoir considérer une union finie.

$$\Omega = \{\varepsilon \mid \varepsilon(0) = 0, \varepsilon(1) = 1, \dots, \varepsilon(n) = 1\} \subset \{-1, 0, 1\}^{N+1}$$

Alors on a :

$$\mathcal{S}_i = \bigcup_{\varepsilon \in \Omega} A_\varepsilon.$$

Or d'après le lemme de Thom (Lemme 2.6) tous les A_ε sont des intervalles.

De plus, $|\Omega| \leq 3^N$ alors l'union est une union finie d'intervalles.

Cela nous permet d'avoir que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ et finalement :

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}$$

□

2.4 Continuité des racines

Lemme 2.8. *Soit X un espace métrique connexe et E un anneau de fonctions continues défini sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Prenons :

$$f = f_0 + f_1 T + \dots + f_d T^d \in E[T]$$

tel que le polynôme $f(x, T)$ admet exactement $e \leq d$ racines complexes distinctes pour tout $x \in X$.

Dans ce cas, le nombre de racines réelles distincts de $f(x, T)$ est aussi constant pour tout $x \in X$. ()*

Si pour tout $x \in X$, on note :

$$\zeta_1(x) < \dots < \zeta_r(x)$$

*les racines réelles de $f(x, T)$, alors les fonctions ζ_j sont continues sur X . (**)*

Remarque 2.9. Les racines sont comptées ici sans multiplicités.

Démonstration. Prenons :

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto |\{t \in \mathbb{R} ; f(x, t) = 0\}| \end{aligned}$$

Cette fonction associe à $x \in X$ le nombre de racines réelles de $f(x, T)$.

L'objectif est de montrer que cette fonction est localement constante car étant donné que X est connexe, cela nous permettra de dire que φ est constante et de montrer (*).

Soit $x_0 \in X$, considérons $f(x_0, T)$ et notons $z_0, \dots, z_e$ ces racines complexes.

Pour chaque racine z_i , on considère une boule fermée B_i centrée en z_i tel que :

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j \quad \text{et} \quad B_i \cap \mathbb{R} = \emptyset \quad \text{si } z_i \notin \mathbb{R}$$

Alors par le lemme 2.4, il existe un voisinage ouvert $V(x_0)$ de x_0 tel que $\forall x \in V(x_0)$, on ait exactement une racine de $f(x, T)$ dans chaque B_i .

Prenons $x \in V(x_0)$ et montrons que $f(x, T)$ admet autant de racines réelles que $f(x_0, T)$.

Soit z_i une racine réelle de $f(x_0, T)$.

Notons z'_i la racines de $f(x, T)$ associé à z_i .

Étant donné que $f(x, T) \in \mathbb{R}[T]$, on a que $f(x, \overline{z'_i}) = 0$.

On a aussi que $\overline{z'_i} \in B_i$ car le centre de B_i est $z_i \in \mathbb{R}$.

Par unicité de z'_i , on a que :

$$z'_i = \overline{z'_i}$$

Et donc

$$z'_i \in \mathbb{R}$$

Soit z_i une racine non réelle de $f(x_0, T)$.

Étant donné que $z'_i \in B_i$ et que $B_i \cap \mathbb{R} = \emptyset$,

$$z'_i \notin \mathbb{R}$$

On a alors que $\varphi|_{V(x_0)}$ est constante et donc par connexité de X , φ est constante.

Montrons maintenant que les ζ_i sont continues.

Sachant que la continuité est une caractéristique locale, il suffit de montrer que les ζ_i sont continues sur $V(x_0)$.

Supposons pour la suite que $z_1, \dots, z_r$ sont les racines réelles de $f(x_0, T)$ et que $\zeta_i(x_0) = z_i \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$.

En notant que $\zeta_i(x)$ est la seule racine de $f(x, T)$ dans B_i , on a que le graphe de ζ_i sur $V(x_0)$ est donné par :

$$\{(x, t) \in V(x_0) \times B_i \mid f(x, t) = 0\}$$

qui est d'ailleurs fermé par image réciproque du fermé $\{0\}$ d'une fonction continue.

Alors par le lemme 2.1, sachant que B_i est compact on a que ζ_i est continue sur $V(x_0)$.

□

2.5 Cas particulier du théorème de Chevalley

Théorème 2.10. Soit $A = (A_0, \dots, A_d)$ un $d+1$ -uplets de variables, on pose :

$$f(A, T) = A_0 + \dots + A_d T^d \in \mathbb{Z}[A, T]$$

Soit $e \in \{0, \dots, d\} \cup \{\infty\}$. Alors l'ensemble

$$\{a = (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1} \mid f(a, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes}\}$$

est une union finie d'ensemble de la forme :

$$\{a \in \mathbb{C}^{d+1} \mid p_1(a) = \dots = p_k(a), q(a) \neq 0\}$$

où $p_i(A), q(A) \in \mathbb{Z}[A]$.

C'est à dire un constructible de $\mathbb{C}^{d+1}$

On peut regarder déjà ce qu'il se passe avec des valeurs simples de e :

Si $e = 0$, notre ensemble est :

$$\{(a_0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{d+1} \mid a_0 \neq 0\} = \{a \in \mathbb{C}^{d+1} \mid p_1(a) = \dots = p_d(a) = 0 \text{ et } q(a) \neq 0\}$$

où $p_i(A) = A_i$ et $q(A) = A_0$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Si on regarde avec $e = \infty$, notre ensemble est simplement :

$$\{(0, \dots, 0)\} = \{a \in \mathbb{C}^{d+1} \mid p_1(a) = \dots = p_{d+1}(a) = 0 \text{ et } q(a) \neq 0\}$$

où $p_i(A) = A_i$ et $q(A) = 1$ par exemple.

Démonstration. Par la remarque précédente, on peut supposer $d > 0$.

$a = (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ où $a_d \neq 0$.

On note $g = \deg(\text{pgcd}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T)))$ dans $\mathbb{C}[T]$.

Alors, le ppcm de ces deux polynômes a pour degré $2d - g - 1$, et le nombre de racines complexes distinctes de $f(a, T)$ est $d - g$.

Soit $0 < k < d$.

Considérons la condition $(*)$:

$$f(a, T) \cdot q(x, T) - \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T) = 0$$

pour un $x = (x_0, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$ non nul, avec

$$q(x, T) = x_0 + x_1 T + \dots + x_{k-1} T^{k-1}, \quad r(x, T) = x_k + x_{k+1} T + \dots + x_{2k} T^k$$

Montrons qu'elle est équivalente à la condition $d - g \leq k$:

Supposons que l'on ait $(*)$, alors :

$$f(a, T) \mid f(a, T) \cdot q(x, T)$$

On a donc :

$$f(a, T) \mid \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T)$$

Finalement :

$$\text{ppcm}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T)) \mid \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T)$$

Et le degré des polynômes impose que $2d - g - 1 \leq d + k - 1$, c'est à dire $d - g \leq k$.

Réciproquement, on suppose que $d - g \leq k$.

Il s'agit de trouver un polynôme dans $\mathbb{C}_{k-1}[T]$ et un dans $\mathbb{C}_k[T]$ qui vérifient (*).

Comme $d - g \leq k$, on a $k + g - d \geq 0$.

Posons $U(T) = T^{k+g-d}$ (cela va nous assurer que $x \neq 0$).

$$\deg\left(\frac{\text{ppcm}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T))}{f(a, T)} \cdot U(T)\right) = (d - 1 + d - g) - d + k + g - d = k - 1$$

et

$$\deg\left(\frac{\text{ppcm}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T))}{\frac{\partial f}{\partial T}(a, T)} \cdot U(T)\right) = (d - 1 + d - g) - (d - 1) + k + g - d = k$$

alors on a bien trouvé nos deux polynômes de $\mathbb{C}_{k-1}[T]$ et $\mathbb{C}_k[T]$ ce qui assure l'existence d'un $x \in \mathbb{C}^{2k+1}$ tel que :

$$q(x, T) = \frac{\text{ppcm}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T))}{f(a, T)} \cdot U(T) \quad \text{et} \quad r(x, T) = \frac{\text{ppcm}(f(a, T), \frac{\partial f}{\partial T}(a, T))}{\frac{\partial f}{\partial T}(a, T)} \cdot U(T)$$

vont bien satisfaire (*).

Ainsi (*) est équivalente à $d - g \leq k$ c'est à dire à $f(a, T)$ a au plus k racines distinctes.

Clairement, on a :

$$f(a, T) \cdot q(x, T) - \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T) = \beta_0(a, x) + \beta_1(a, x)T + \dots + \beta_{d+k-1}(a, x)T^{d+k-1}$$

pour certaines formes bilinéaires $\beta_i : \mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ainsi, la condition (*) est équivalente à :

$$\text{il existe } x \text{ non nul tel que } \beta_i(a, x) = 0 \text{ pour tout } i$$

c'est-à-dire que l'application linéaire

$$x \mapsto (\beta_0(a, x), \dots, \beta_{d+k-1}(a, x)) : \mathbb{C}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{d+k}$$

admet un noyau non trivial.

Cela revient à dire que tous les mineurs de taille $(2k+1) \times (2k+1)$ de la matrice associée à cette application s'annulent.

On en déduit que l'ensemble

$$\mathcal{A}_k = \{a \in \mathbb{C}^{d+1} \mid a_d \neq 0 \text{ et } f(a, T) \text{ a au plus } k \text{ racines distinctes}\}$$

est l'intersection de $\{a \in \mathbb{C}^{d+1} : a_d \neq 0\}$ avec le lieu d'annulation d'un certain nombre fini de polynômes à coefficients entiers et est donc un constructible de $\mathbb{C}^{d+1}$.

Comme les constructibles de $\mathbb{C}^{d+1}$ forment une algèbre booléenne, $\mathcal{A}_k \setminus \mathcal{A}_{k-1}$ est également constructible, ce qui nous permet de conclure.

□

Notons que ce théorème est un cas particulier du théorème de Chevalley :

Théorème 2.11 (Théorème de Chevalley-Tarski). *Soit $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^n$ la projection sur les n premières coordonnées.
Alors, l'image d'un ensemble constructible de $\mathbb{C}^{n+1}$ est constructible.*

On peut voir l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{a = (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1} \mid f(a, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes}\}$$

comme un constructible de $\mathbb{C}^{d+2+e}$.

Notons :

$$\mathcal{A}_{e+1} = \{X_1 = (a_0, \dots, a_d, x_1, \dots, x_{e+1}) \in \mathbb{C}^{d+2+e} \mid f(a, x_i) = 0, \forall i \in [1, e+1] \text{ et } x_i \neq x_j\}$$

Et

$$\mathcal{A}_e = \{X_2 = (a_0, \dots, a_d, x_1, \dots, x_e) \in \mathbb{C}^{d+1+e} \mid f(a, x_i) = 0, \forall i \in [1, e] \text{ et } x_i \neq x_j\}$$

Ainsi que : $\Pi : \mathbb{C}^{d+2+e} \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ et $\Pi' : \mathbb{C}^{d+1+e} \rightarrow \mathbb{C}^{d+1}$ les projections selon les $d+1$ premières coordonnées (selon les a_i).

Alors $\Pi'(\mathcal{A}_e)$ (resp. $\Pi(\mathcal{A}_{e+1})$) correspond à avoir au moins e (resp. $e+1$) racines distinctes alors $\Pi'(\mathcal{A}_e) \setminus \Pi(\mathcal{A}_{e+1})$ a avoir exactement e racines distinctes.

On a alors que $\mathcal{A}_e$ et $\mathcal{A}_{e+1}$ sont constructibles de $\mathbb{C}^{d+2+e}$ et $\mathbb{C}^{d+1+e}$ et $\Pi'(\mathcal{A}_e) \setminus \Pi(\mathcal{A}_{e+1}) = \mathcal{A}$ qui est donc constructible, d'où le fait qu'on ait montré une version faible du Théorème 2.11.

Chapitre 3

Le Théorème de Tarski-Seidenberg par la méthode de Łojasiewicz

3.1 Théorème central

On rappelle que X est un espace métrique et E un anneau de fonction continues de X dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.1. Soient $f_1(T), \dots, f_M(T) \in E[T]$.

Alors la liste $f_1, \dots, f_M$ peut être augmentée en une liste $f_1, \dots, f_N$ dans $E[T]$ ($M \leq N$), et X peut être partitionné en un nombre fini de E -set X_i ($1 \leq i \leq k$) tels que pour chaque composante connexe C de chaque X_i , il existe des fonctions réelles continues $\xi_{C,1} < \dots < \xi_{C,\mu(C)}$ sur C vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Chaque fonction f_n ($1 \leq n \leq N$) est de signe constant ($-1, 0$ ou 1) sur chacun des graphes $\Gamma(\xi_{C,j})$ ($1 \leq j \leq \mu(C)$) et sur chacun des ensembles $(\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1})$ ($0 \leq j \leq \mu(C)$), où $\xi_{C,0} := -\infty$ et $\xi_{C,\mu(C)+1} := +\infty$ sont par convention des fonctions constantes sur C .
2. Chacun des ensembles $\Gamma(\xi_{C,j})$ et $(\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1})$ de (1) est de la forme :

$$\{(x, t) \in C \times \mathbb{R} \mid \text{sign}(f_n(x, t)) = \varepsilon(n) \text{ pour } n = 1, \dots, N\}$$

pour une condition de signe convenable $\varepsilon : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

Démonstration. Prenons $d \in \mathbb{N}$ tel que chacun des polynômes $f_m(T)$ soit de la forme :

$$f_m(T) = f_{m0} + f_{m1}T + \dots + f_{md}T^d, \quad \text{avec } f_{mr} \in E \text{ pour } 0 \leq r \leq d.$$

Soit Δ un sous-ensemble de $\{1, \dots, M\} \times \{0, \dots, d\}$ et posons :

$$f_\Delta(T) := \prod_{(m,r) \in \Delta} \left(\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r} \right) \in E[T].$$

Alors $\deg_T(f_\Delta) \leq Md^2$ ce qui nous assure que le nombre de racines de f_Δ appartient à l'ensemble $\{0, \dots, Md^2, \infty\}$.

Soit e parcourant $\{0, \dots, Md^2, \infty\}$, et posons :

$$A_{\Delta,e} := \{x \in X \mid f_\Delta(x, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes}\}.$$

D'après (Lemme 2.10), $A_{\Delta,e}$ est un E -set.

Pour un Δ fixé, les ensembles $A_{\Delta,e}$ sont disjoints deux à deux quand e varie, et partitionnent X . Comme les E -set forment une algèbre booléenne, on peut partitionner $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ en E -set X_i tels que chaque $A_{\Delta,e}$ soit une union de certains X_i .

Augmentons $f_1, \dots, f_M$ en $f_1, \dots, f_N$ tels que :

$$\{f_1, \dots, f_N\} = \left\{ \frac{\partial^r f_m}{\partial T^r} \mid 1 \leq m \leq M, 0 \leq r \leq d \right\}.$$

Montrons alors que cette suite $\{f_1, \dots, f_N\}$ et ces X_i sont satisfaisants pour la conclusion du théorème.

Pour chaque composante connexe C de X_i , on pose :

$$\Delta(C) = \{(m, r) \in \{1, \dots, M\} \times \{0, \dots, d\} : \frac{\partial^r f_m}{\partial T^r} \text{ n'est pas identiquement nulle sur } C \times \mathbb{R}\}$$

Fixons une telle composante C .

Pour un Δ fixé, il existe e tel que $C \subseteq A_{\Delta,e}$, en particulier C est contenu dans $A_{\Delta(C),e}$ pour un certain e .

Alors $f_{\Delta(C)}(x, T)$ a exactement e zéros complexes pour tout $x \in C$.

On affirme que e est fini.

Pour le voir, considérons un facteur $g(T) = \partial^r f_m / \partial T^r(x, T)$ avec $(m, r) \in \Delta(C)$. L'ensemble C est contenu dans $A_{\{(m,r)\},e'}$ pour un certain $e' \in \{0, \dots, d\}$, donc le nombre de zéros complexes de $g(x, T)$ est indépendant de $x \in C$.

Parce que $(m, r) \in \Delta(C)$, ce nombre e' est fini, donc e est fini. Le lemme (2.8) implique alors qu'il existe des fonctions continues $\xi_{C,1} < \dots < \xi_{C,\mu(C)}$ sur C telles que :

$$\{(x, t) \in C \times \mathbb{R} \mid f_{\Delta(C)}(x, t) = 0\} = \Gamma(\xi_{C,1}) \cup \dots \cup \Gamma(\xi_{C,\mu(C)}).$$

Nous allons prouver que ces fonctions $\xi_{C,j}$ satisfont les conclusions du théorème.

Affirmation 1. Chaque fonction $\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}$ ($1 \leq m \leq M$, $0 \leq r \leq d$) a un signe constant sur chacun des ensembles $\Gamma(\xi_{C,j})$ ($1 \leq j \leq \mu(C)$) et $(\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1})$ ($0 \leq j \leq \mu(C)$), où $\xi_{C,0} = -\infty$ et $\xi_{C,\mu(C)+1} = +\infty$.

Remarquons que cela implique la conclusion **(1)** du théorème, car chaque f_n est l'une des $\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}$.

Pour démontrer l'affirmation, notons d'abord que si $(m, r) \notin \Delta(C)$, alors $\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}$ est nulle sur les ensembles indiqués. Si $(m, r) \in \Delta(C)$, alors le nombre de zéros complexes de $g(x, T) := \frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}$ est indépendant de $x \in C$ (car C est inclu dans un certain $A_{\{(m,r)\},e'}$).

Ainsi, d'après le lemme (2.8), le lieu des zéros de g sur $C \times \mathbb{R}$ est une union finie disjointe de graphes de fonctions réelles continues sur C . Comme $f_{\Delta(C)}$ contient g comme facteur, ces fonctions doivent être parmi les $\xi_{C,j}$.

Étant donné que C est connexe, on a que les graphes et les cellules sont connexes en utilisant le lemme 2.2, cela démontre l'affirmation 1.

Soit maintenant B l'un des ensembles de l'affirmation 1. Posons :

$$\varepsilon(m, r) := \text{sign} \left(\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r} \right) \text{ sur } B,$$

et définissons :

$$B' := \left\{ (x, t) \in C \times \mathbb{R} \mid \text{sign} \left(\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}(x, t) \right) = \varepsilon(m, r) \text{ pour tout } 1 \leq m \leq M, 0 \leq r \leq d \right\}.$$

Clairement, $B \subseteq B'$.

Affirmation 2. $B = B'$.

Supposons le contraire. Prenons $(x, t') \in B' \setminus B$ et $(x, t) \in B$. Disons que $t < t'$.

Sachant que à x fixé, pour tout $n \in [1, N]$ on a que $f_n(x, s) \in \mathbb{R}[s]$, On peut alors appliquer Le lemme de Thom 2.6 qui implique que $\{s \in \mathbb{R} \mid (x, s) \in B'\}$ est connexe, donc $\{x\} \times [t, t'] \subseteq B'$.

Remarquons que $f_{\Delta(C)}$ doit changer de signe sur $\{x\} \times [t, t']$, puisque $(x, t) \in B$ et $(x, t') \notin B$.

Mais on a que $f_{\Delta(C)}$ est un produit de $\frac{\partial^r f_m}{\partial T^r}$ qui ne change pas de signe sur B' ce qui nous donne une contradiction.

Cela prouve alors l'affirmation 2. □

3.2 Propriété de Łojasiewicz et corollaire

Proposition 3.2 (Propriété de Łojasiewicz). *On dit que (X, E) admet la propriété de Łojasiewicz si chaque E -set admet un nombre finis de composantes connexes et que chacune de ses composantes est elle même un E -set.*

Corollaire 3.3. *Si (X, E) admet la propriété de Łojasiewicz, alors :*

1. $(X \times \mathbb{R}, E[T])$ admet aussi la propriété de Łojasiewicz
2. l'image par la projection $\Pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ de chaque $E[T]$ -set est un E -set.

Démonstration. Soit S un $E[T]$ -set, alors S est une union d'ensemble de la forme :

$$\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x, t) = 0, g_1(x, t) > 0, \dots, g_k(x, t) > 0\}$$

où $f, g_1, \dots, g_k \in E[T]$.

On peut alors appliquer aux fonctions $f_1, \dots, f_N$ qui interviennent dans S le théorème précédent (3.1), ce qui va nous donner une certaine extension de fonction $f_1, \dots, f_M$ ($N \leq M$) et une partition $X = \bigcup X_i$.

Sachant que la partition est finie, on a que S est une union finie de la forme :

$$\{(x, t) \in X_i \times \mathbb{R} \mid f_{i_1}(x, t) = 0, f_{i_2}(x, t) > 0, \dots, f_{i_k}(x, t) > 0\}$$

Alors comme (X, E) a la propriété de Łojasiewicz, chaque X_i , étant un E -set, admet un nombre fini de composantes connexes qui sont elles même des E -set.

On a alors que S est union finie de la forme :

$$\{(x, t) \in C \times \mathbb{R} \mid f_{i_1}(x, t) = 0, f_{i_2}(x, t) > 0, \dots, f_{i_k}(x, t) > 0\}$$

où les C sont des connexes de X .

Le théorème 3.1 nous assure ensuite que ces ensembles sont des unions finies de graphes de fonctions continues $\xi_{C,j} : C \rightarrow \mathbb{R}$ ou de bande entre deux fonctions continues $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \xi_{C,j}(x) < t < \xi_{C,j+1}(x)\}$.

Dans les deux cas, on a affaire à une composantes qui est connexe d'après le lemme 2.2.
Il reste à montrer que ces composantes sont des $E[T]$ -set.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, t) \in C \times \mathbb{R} \mid \xi_{C,j}(x) = t\} \\ &= \{(x, t) \in C_i \times \mathbb{R} \mid \text{sign}(f_n(x, t)) = \varepsilon(n), \forall n \in [1, M]\} \end{aligned}$$

pour une certaine condition de signe $\varepsilon : \{1, \dots, M\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

Ensuite, sachant que C est un E -set, alors C est union finie de la forme :

$$\{x \in X \mid \text{sign}(g_j(x)) = \delta(j)\}$$

pour une certaine condition de signe $\delta : \{1, \dots, l\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.

On a alors que A est union finie de la forme :

$$\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid \text{sign}(g_i(x)) = \delta(i), \text{sign}(f_n(x, t)) = \varepsilon(n), \forall n \in [1, M]\}$$

Alors A est bien un $E[T]$ -set.

Il reste à montrer que la projection de S par $\Pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ est un E -set.

On a montré que S était union finies de graphes $\Gamma(\xi_{C,j})$ où de bande entre graphes $(\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1})$ or on a que :

$$\Pi(\Gamma(\xi_{C,j})) = C \quad \text{et} \quad \Pi((\xi_{C,j}, \xi_{C,j+1})) = C$$

Or on a dit que C était un E -set car (X, E) admet la propriété de Łojasiewicz, d'où :

$$\Pi(S) \text{ est un } E\text{-set.}$$

□

Ce corollaire va nous permettre de démontrer 1.14.

Comme on avait dit précédemment, les $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ -set de l'espace $\mathbb{R}^m$ sont exactement les ensembles semi-algébriques.

Montrons par récurrence sur $m \geq 1$ que la paire $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m])$ admet la propriété de Łojasiewicz qui impliquera le théorème de Tarski-Seidenberg.

Démonstration. Pour $m = 1$:

On a montré que les ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}$ étaient les unions finies d'intervalles alors chaque semi-algébriques de $\mathbb{R}$ admet un nombre finie de composantes connexes qui sont chacune des intervalles donc $\mathbb{R}[X]$ -set c'est à dire semi-algébrique de $\mathbb{R}$. Pour $m > 1$:

On remarque que $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]) = (\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{m-1}][X_m])$, alors en utilisant le Corollaire 3.3 on peut conclure. □

Corollaire 3.4. Soit $n \geq 1$ et S un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ alors l'adhérence de S est un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Notons $\overline{S}$ l'adhérence de S , on a :

$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, \exists y \in S \text{ tel que } \|x - y\|_2^2 < \varepsilon^2\}$$

Posons

$$B = \{(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid y \in S, \|x - y\|_2^2 < \varepsilon^2\}$$

qui est semi-algébrique car la norme euclidienne au carré est un polynôme et S est semi algébrique. Considérons la projection

$$\begin{aligned}\Pi : \mathbb{R}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, \varepsilon, y) &\longmapsto (x, \varepsilon)\end{aligned}$$

Donc

$$\Pi(B) = \{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists y \in S, \|x - y\|_2^2 < \varepsilon^2\}$$

Ensuite on considère

$$\Delta = \{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varepsilon > 0\}$$

de manière à avoir :

$$\Delta \setminus \Pi(B) = \{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varepsilon > 0, \forall y \in S, \|x - y\|_2^2 \geq \varepsilon^2\}$$

$\Pi(B)$ est semi-algébrique d'après 1.14 et Δ l'est aussi donc la différence l'est aussi. Considérons la projection

$$\begin{aligned}\Pi' : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \varepsilon) &\longmapsto (x)\end{aligned}$$

Qui donne :

$$\Pi'(\Delta \setminus \Pi(B)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon > 0, \forall y \in S, \|x - y\|_2^2 \geq \varepsilon^2\}$$

et en prenant le complémentaire on a finalement :

$$\mathbb{R}^n \setminus \Pi'(\Delta \setminus \Pi(B)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, \exists y \in S, \|x - y\|_2^2 < \varepsilon^2\} = \overline{S}$$

Ce qui permet de conclure. □

Bibliographie

- [1] Michel Coste, An Introduction to Semialgebraic Geometry, polycopié, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, (2002), <https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf>
- [2] Lou van den Dries, Tame Topology and O-minimal Structures, in London Mathematical Society Lecture Note Series **248**, Cambridge University Press, (1998), ISBN 0-521-59838-9.