

Nombres de Catalan

Nicola Beneforti

Encadré par Hamza Si Kaddour

Université Claude Bernard, Lyon 1

43, Boulevard du 11 novembre 1918, 69100, Villeurbanne

Projet L3

4 Juillet 2025

Table des matières

Avant-Propos	2
1 Propriétés des nombres de Catalan	4
1.1 Écritures équivalentes	4
1.2 Comportement asymptotique	7
1.3 Arithmétique des nombres de Catalan	8
1.4 Représentation intégrale	10
1.5 Déterminants de Hankel	12
1.6 Série des inverses	21
2 Interprétations combinatoires des nombres de Catalan	24
2.1 Méthodes d'énumération symbolique	24
2.2 Découpage en triangles d'un polygone convexe	27
2.3 Chemins de Dyck	32
2.4 Principe de réflexion d'André	34
2.5 Mots bien parenthésés (ou Mots de Dyck)	36
2.6 Arbres binaires	37
3 Généralisations des nombres de Catalan	42
2.1 Généralisation analytique	42
2.2 Généralisation combinatoire	57
Bibliographie	63

Avant-propos

À partir de simples règles permettant de regrouper certains objets ensemble, comment déduire des propriétés concernant ces dits-objets ? Le plus souvent, compter le nombre d'objets vérifiant ces propriétés basiques constitue le premier pas de l'étude combinatoire : de combien de manière peut-on mélanger un jeu de n cartes ? Bien sûr, la réponse à l'exemple précédent fait intervenir le nombre de permutations pour n éléments ; en l'occurrence, il existe $n!$ façons de mélanger ce jeu de cartes. Il est ensuite tout à fait naturel de vouloir quantifier cette valeur en augmentant le nombre d'objets. En reprenant l'exemple du jeu de cartes, la fonction factorielle nous pose soucis car son comportement précis quand n devient de plus en plus grand nous est assez flou à première vue. Fort heureusement, la magnifique formule associée au mathématicien écossais James Stirling (1692-1770) nous donne un équivalent de la factorielle en l'infini, et nous permet d'exprimer le comportement asymptotique du problème combinatoire considéré avec des fonctions élémentaires,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

et c'est ici le premier lien que tisse la Combinatoire avec l'Analyse. Néanmoins, il est clair que l'exemple du jeu de cartes pourrait se traiter similairement s'il s'agissait d'ordonner un alphabet de n lettres ou s'il s'agissait de ranger sur une étagère une collection de n livres. Ce sont alors trois problèmes combinatoires distincts, car les objets considérés ne sont pas les mêmes, mais qui jouissent, au bout de l'étude, du même résultat ; nous dirons dès le Chapitre 2 qu'ils sont combinatoirement isomorphes. Il était ici évident que ces trois problèmes n'en constituaient en fait qu'un, mais deux problèmes peuvent aboutir au même résultat, sans pour autant que le lien entre eux saute aux yeux. Deux problèmes isomorphes au sens combinatoire peuvent alors dans un premier temps bénéficier de deux études en tout point différentes, bien qu'un lien difficile à entrevoir les lie l'un à l'autre !

Le 4 septembre 1751, Euler écrit à son ami Goldbach, lui faisant part de ses récentes recherche sur un problème combinatoire [17] :

« Il m'est dernièrement échu de rencontrer une question, laquelle me parut digne d'attention. Elle a trait au nombre de manières selon lesquelles un polygone donné, pourvu qu'il soit convexe, peut être divisé en triangles par le moyen de lignes diagonales » ([6])

Après une description du problème pour un n -gone, Euler conclut

« Soit à présent désigné par la lettre x le nombre de façons dont il est possible d'effectuer ladite division [...]. Je suis dès lors parvenu à la conclusion que, de la manière la plus générale, l'on a :

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n - 10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n - 1)}.$$

[...] Quant à la suite des nombres 1, 2, 5, 14, 42, 132 et ainsi de suite, j'ai pareillement observé la propriété suivante :

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \dots = \frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 4a}}{2a^2}.$$

»

([6], [17])

Ainsi, déjà en 1751, Euler savait résoudre ce problème combinatoire et connaissait également ce qu'on appellera plus tard, au Chapitre 2, la fonction génératrice ordinaire associée. Néanmoins, les écrits d'Euler ne permettent pas d'assurer qu'il ait trouvé une preuve complète aux résultats qu'il avance. Les nombres ainsi construits sont appelés pour la première fois les « nombres de Catalan » en 1973 par John Riordan [13].

Au cours des années 1750, Euler fait également part de ces nombres au mathématicien Johann Segner, qui à son tour en fait une publication en 1758 :

« Le grand Euler a bien voulu me communiquer ces nombres avec une bienveillance toute particulière ; toutefois, la manière dont il les a découverts, ainsi que la règle qui préside à leur progression, m'est demeurée cachée. » ([6])

Segner développe alors une approche récursive des nombres de Catalan et prouve que le nombre de décompositions en n triangles vérifie

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-1-k}, \quad T_0 = 1.$$

Par la suite, dans les années 1830, Liouville partage le problème à Lamé ([6]), qui répond le lendemain ; réponse incluant la preuve de la forme explicite des nombres de Catalan, sachant la récurrence convolutionnelle ci-dessus :

$$T_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Cette preuve de trois pages apparaît publiquement pour la première fois en 1938 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* ([6]). Peu de temps après, Eugène Catalan publie une étude plus poussée de ces nombres, remarquant qu'ils sont la solution d'autres problèmes combinatoires, à première vue décorrés. Catalan poursuivant l'étude de ces nombres, c'est alors qu'ils ont acquis leur popularité en tant que « nombres de Catalan ». Dans d'autres publications, Catalan donne enfin rigoureusement raison à Euler, en démontrant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Il s'agira donc dans cette étude d'établir dans un premier temps les principales propriétés analytiques et algébriques des nombres de Catalan, sans se soucier des problèmes combinatoires dont ils sont la solution. Il conviendra dans un second temps d'étudier leurs applications en combinatoire, en insistant sur différents problèmes d'apparence sans liens les uns avec les autres. Nous profiterons de ce second chapitre pour introduire les méthodes d'énumération symbolique, outils utiles et rigoureux en combinatoire. Enfin, nous chercherons à généraliser les nombres de Catalan, que ce soit analytiquement ou combinatoirement, afin d'ouvrir de nouvelles perspectives d'études.

Chapitre 1

Propriétés des nombres de Catalan

1.1 Écritures équivalentes

Selon le problème combinatoire considéré, les nombres de Catalan peuvent apparaître sous différentes formes équivalentes (forme explicite, formes récurrentes *etc.*). Dans cette étude, nous considérerons comme définition des nombres de Catalan la forme convolutionnelle qui suit.

Définition 1 (récurrence convolutionnelle). *Les nombres de Catalan sont les termes de la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :*

$$C_0 = 1 \text{ et } C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Il est alors parfaitement clair que les nombres de Catalan sont des entiers strictement positifs.

Exemple 2. *Les premiers termes de cette suite ainsi définie sont alors :*

$C_0 = 1$	$C_6 = 132$
$C_1 = 1$	$C_7 = 429$
$C_2 = 2$	$C_8 = 1430$
$C_3 = 5$	$C_9 = 4862$
$C_4 = 14$	$C_{10} = 16796$
$C_5 = 42$	$C_{11} = 58786$

Théorème 3. *Les nombres de Catalan ont pour forme explicite, pour tout entier naturel n :*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Preuve : Posons deux séries entières $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ et $g : t \mapsto 2tf(t)$. Nous démontrerons dans le cadre de l'étude des chemins de Dyck que le rayon de convergence de f est minorée par $\frac{1}{4}$.

Par produit de Cauchy, si $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$:

$$f(t)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} t^n.$$

Donc,

$$1 + tf(t)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} t^{n+1} = C_0 t^0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n = f(t).$$

On déduit donc $f(t)$ est donc racine du polynôme $tX^2 - X + 1$. La fonction g nous permet alors de considérer un polynôme unitaire, pour nous éviter les problèmes de définition en $t = 0$. En effet, pour tout $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$:

$$\begin{aligned} g(t)^2 &= 4t^2 f(t)^2 \\ &= 4t[tf(t)^2 + 1 - 1] \\ &= 4t[f(t) - 1] \\ &= 2g(t) - 4t \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $g(t)$ est racine du polynôme $X^2 - 2X + 4t$, de discriminant $\Delta = 4(1 - 4t) > 0$ car $t < \frac{1}{4}$.

Alors, il existe $\varepsilon :]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\rightarrow \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, g(t) = 1 + \varepsilon(t)\sqrt{1 - 4t}$$

Mais étant donné que $\forall t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \varepsilon(t) = \frac{g(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}}$, ε est alors continue sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ comme quotient de fonctions continues.

Montrons alors que la fonction ε est constante. Supposons qu'il existe $t_1 \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et $t_2 \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ tels que $\varepsilon(t_1) = 1$ et $\varepsilon(t_2) = -1$. La fonction ε étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assurerait alors l'existence d'un antécédent de 0 par cette fonction, ce qui est absurde au vu de sa définition. Donc, la fonction ε est constante. Mais comme $g(0) = 0 = 1 + \varepsilon(0)$, on déduit que $\varepsilon(0) = -1$ et donc que $\forall t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \varepsilon(t) = -1$. Finalement,

$$\forall t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t}$$

Or, si $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (-1)^{n-1} (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} (n+1)} \binom{2n}{n} x^{n+1} \end{aligned}$$

D'où, pour tout $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 - \sqrt{1 - 4t} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} (n+1)} \binom{2n}{n} (-4t)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1})^2 2^{2(n+1)}}{2^{2n+1} (n+1)} \binom{2n}{n} t^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)} \binom{2n}{n} t^{n+1} \\
&= 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n} t^n
\end{aligned}$$

On déduit donc à partir de la définition de g que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n} t^n$ pour tout $t \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. Par

unicité du développement en série entière, on conclut alors :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriété 4. Les nombres de Catalan peuvent également être caractérisés par la relation récurrente suivante :

$$C_0 = 1 \text{ et } C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1} &= \frac{2(2n-1)}{n+1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} && \text{par Théorème 3} \\
&= \frac{2(2n-1)}{n+1} \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n^2(n+1)(n-1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n! n!} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n && \text{par Théorème 3}
\end{aligned}$$

Propriété 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, le **Théorème 3** assure que

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
&= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} \\
&= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \frac{(2n)!}{n! n!} \\
&= \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple 6. La propriété précédente permet donc de lire les nombres de Catalan sur le triangle de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$C_1 = 2 - 1 = 1$$

$$C_2 = 6 - 4 = 2$$

$$C_3 = 20 - 15 = 5$$

$$C_4 = 70 - 56 = 14$$

Nous aurions pu nous servir d'une de ces trois propriétés en guise de définition, mais la récurrence convolutionnelle étant l'interprétation combinatoire la plus présente des nombres de Catalan, elle semble plus naturelle pour définir cette suite.

1.2 Comportement asymptotique

Propriété 7. Les nombres de Catalan ont l'équivalent en l'infini suivant :

$$C_n \sim \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}}$$

Preuve : La formule de Stirling nous permet d'écrire $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Donc,

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &\sim \frac{2\sqrt{\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} \end{aligned}$$

D'où

$$C_n \sim \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{n\pi}} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}}$$

■

Remarque 8. De cet équivalent, nous pouvons bien confirmer que le rayon de convergence de $\sum C_n t^n$ est au moins $\frac{1}{4}$, bien qu'il reste encore à démontrer ce résultat sans utiliser la forme explicite des nombres de Catalan, comme mentionné plus haut. En effet,

$$\frac{C_n}{4^n} \sim \frac{1}{n\sqrt{n\pi}}$$

Et par comparaison à une série de Riemann (quantités positives), on déduit que $\sum \frac{C_n}{4^n} t^n$ converge, et donc que le rayon de convergence est égal à 1.

1.3 Arithmétique des nombres de Catalan

Il s'agira désormais de donner des critères de parité, de primalité et de divisibilité des nombres de Catalan ; inspirés de [1].

Définition 9. Un nombre de Mersenne est un entier naturel qui s'écrit $2^m - 1$, $m > 0$.

Exemple 10. 1, 3, 7, 15 sont des nombres de Mersenne car $1 = 2^1 - 1$, $3 = 2^2 - 1$, $7 = 2^3 - 1$, $15 = 2^4 - 1$.

Propriété 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre C_n est impair si, et seulement si, n est un nombre de Mersenne.

Preuve : Suivant la parité de n , la symétrie présente dans la formule de récurrence convolutionnelle nous permet d'écrire :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = 2 \sum_{k=0}^{n/2} C_k C_{n-1-k}, \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$C_n = 2 \sum_{k=0}^{(n-3)/2} C_k C_{n-1-k} + C_{n-1-\frac{n-1}{2}} C_{\frac{n-1}{2}} = 2 \sum_{k=0}^{(n-3)/2} C_k C_{n-1-k} + (C_{(n-1)/2})^2, \text{ si } n \text{ est impair}$$

\Leftarrow : Supposons qu'il existe $m > 0$ tel que $n = 2^m - 1$. Alors, n est impair. D'où

$$C_n = 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_k C_{n-1-k} + (C_{(n-1)/2})^2$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ C_n et $C_{2^{m-k}-1}$ ont même parité. Le cas $k = 0$ est évident. Pour le cas $k = 1$, par l'égalité précédente, C_n et $C_{(n-1)/2}$ ont même parité (car le carré d'un entier est impair si, et seulement si l'entier en question est impair), et $C_{(n-1)/2} = C_{2^{m-1}-1}$. Si $m-1 = 0$ alors $C_n = C_1 = 1$, d'où C_n est impair, comme C_0 . Notre propriété est ainsi initialisée et on peut supposer $m-1 > 0$. Soit $k \in \llbracket 0, m-2 \rrbracket$ et supposons que C_n et $C_{2^{m-k}-1}$ ont même parité. Par la même égalité précédente,

$$C_{2^{m-k}-1} = 2 \sum_{k=0}^{(2^{m-k}-1-1)/2} C_k C_{2^{m-k}-1-k} + (C_{(2^{m-k}-1)/2})^2.$$

Donc, $C_{(2^{m-k}-1-1)/2} = C_{2^{m-(k+1)}-1}$ et $C_{2^{m-k}-1}$ ont même parité. Mais par hypothèse de récurrence, C_n et $C_{2^{m-k}-1}$ ont même parité. Ainsi C_n et $C_{2^{m-(k+1)}-1}$ ont même parité et l'hérédité est bien démontrée. Alors,

pour $k = m - 1$ on déduit que $C_{2^{m-(m-1)-1}}$ et C_n ont même parité i.e. $C_1 = 1$ et C_n ont même parité. Donc C_n est impair.

\Rightarrow : Supposons que C_n est impair. Alors nécessairement, n est impair,

$$C_n = 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_k C_{n-1-k} + (C_{(n-1)/2})^2$$

et $C_{(n-1)/2}$ est impair (car le carré d'un entier est impair si, et seulement si l'entier en question est impair). Ou bien $\frac{n-1}{2} = 0$, et dans ce cas $n = 1 = 2^1 - 1$ est un nombre de Mersenne. Ou bien $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}^*$ (et $C_{(n-1)/2}$ est impair) et on obtient que $\frac{n-1}{2}$ est nécessairement impair. Par récurrence, on montre que $\frac{n-(2^m-1)}{2^m}$ est impair ou nul pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n-(2^m-1)}{2^m} \geq 0$. L'initialisation est déjà effectuée et si $\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}$ est impair alors $C_{\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}}$ est impair. Ou bien $\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}} = 0$ ou bien $\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}} \in \mathbb{N}^*$ (et $C_{\frac{n-(2^{m-1}-1)}{2^{m-1}}}$ est impair) et on obtient que $\frac{n-(2^m-1)}{2^m}$ est nécessairement impair. La récurrence est ainsi démontrée et donc de proche en proche, on montre que $\frac{n-(2^m-1)}{2^m}$ est impair pour tout $m < m_0$ où $\frac{n-(2^{m_0}-1)}{2^{m_0}} = 0$. La construction développée plus haut assure l'existence de ce $m_0 > 0$. Ainsi, $n - (2^{m_0} - 1) = 0$, d'où $n = (2^{m_0} - 1)$. Donc, n est un nombre de Mersenne.

On a bien l'équivalence voulue. ■

Propriété 12. C_n est premier si, et seulement si, $n = 2$ ou $n = 3$.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que C_n est premier. La **Propriété 4** permet d'écrire $(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$. Alors, on observe clairement que $\frac{n+2}{C_n} < 1$ dès que $n \geq 3$ i.e. $n+2 < C_n$. Alors, $(n+2) \wedge C_n = 1$, car C_n est premier. Donc, comme $C_n \mid (n+2)C_{n+1}$, le lemme de Gauss assure que $C_n \mid C_{n+1}$. On trouve alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$C_{n+1} = kC_n$$

Finalement, comme $C_n \neq 0$, $(n+2)k = 4n+2$. Or, si $k > 3$, $(n+2)k > 4n+2$, quel que soit le choix de n . On distingue alors trois cas possibles :

- $k = 1 \Rightarrow n = 0$. On exclut ce cas car $n > 3$.
- $k = 2 \Rightarrow n = 1$. On exclut ce cas car $n > 3$.
- $k = 3 \Rightarrow n = 4$. On exclut ce cas car $C_4 = 14$ non-premier

Alors, dès que $n > 3$, C_n est non-premier. Quand $n \leq 3$, seuls $C_2 = 2$ et $C_3 = 5$ sont premiers.

Le sens réciproque est évident.

Nous pouvons alors conclure :

C_n est premier si, et seulement si, $n = 2$ ou $n = 3$. ■

Propriété 13. $C_n \mid (n + 2)$ si, et seulement si, $n \leq 3$.

Preuve : Si $n \leq 3$, $C_0 = C_1 = 1$ d'où $C_n \mid (n + 2)$ pour $n = 0, 1$. $C_2 = 2$ d'où $C_n \mid (n + 2)$ pour $n = 2$. $C_3 = 5$ d'où $C_n \mid (n + 2)$ pour $n = 3$.

Réciproquement, raisonnons par contraposition. Supposons $n > 3$. De la forme explicite (**Théorème 3.**) on déduit que

$$C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\prod_{k=2}^n (n+k)}{n!}$$

D'où

$$\frac{n+2}{C_n} = \frac{n!}{\prod_{k=3}^n (n+k)} = \frac{(n-1)!n}{(2n) \prod_{k=3}^{n-1} (n+k)} \quad \text{Car } n > 3$$

Ainsi,

$$\frac{n+2}{C_n} = \frac{\prod_{k=3}^{n-1} k}{\prod_{k=3}^{n-1} (n+k)} = \prod_{k=3}^{n-1} \frac{k}{n+k} \notin \mathbb{N}$$

Finalement, $C_n \nmid (n + 2)$.

On a bien $C_n \mid (n + 2)$ si, et seulement si, $n \leq 3$.

■

1.4 Représentation intégrale

Le but est ici d'interpréter les nombres de Catalan comme l'intégrale d'une fonction [12] (à l'image de la fonction Γ d'Euler pour la factorielle) afin de les relier à des domaines analytiques – que nous développerons dans le Chapitre 3 – mais aussi algébriques, comme le témoignera la section 1.5 sur les déterminants de Hankel.

Le résultat que nous nous apprêtons de démontrer peut se déduire naturellement en considérant la transformée de Mellin d'une fonction bien choisie [12]. Néanmoins, nous nous contenterons ici de simplement démontrer la représentation intégrale des nombres de Catalan, sans nous soucier d'où elle provient.

Théorème 14 (Représentation intégrale). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx$$

Preuve : Si $n \in \mathbb{N}$, le changement de variables $x = 2 \cos(u)$ bijectif donne :

$$\int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2 \cos(u))^{2n} \sqrt{1 - (\cos(u))^2} (-2 \sin(u)) du$$

D'où, par positivité de \sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx = 2^{2(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n} (1 - (\cos(u))^2) du$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx = 2^{2(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n} du - 2^{2(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2(n+1)} du$$

Posons

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^n du$$

Par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{n+1} \cos(u) du = [(\cos(u))^{n+1} \sin(u)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^n \sin(u) \sin(u) du$$

Finalement, comme $\sin(u) \sin(u) = 1 - \cos(u)^2$ et par linéarité de l'intégrale,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

D'où

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

i.e.

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \quad (*)$$

On conjecture alors naturellement que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} W_0$$

Posons $Q_p, p \in \mathbb{N}$ le prédicat suivant : $\forall p \in \mathbb{N}, Q_p : " W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} W_0 "$; et montrons-le par récurrence.

L'initialisation est évidente.

Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} W_0$. Montrons que Q_{p+1} est vraie.

$$W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \quad \text{par } (*)$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui nous donne finalement :

$$W_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2(p+1)} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} W_0 = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p+1)! p!} W_0 = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!(p+1)!} W_0$$

Donc, Q_{p+1} est vraie. La propriété est donc vraie.

Finalement,

$$\int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx = 2^{2(n+1)} W_{2n} - 2^{2(n+1)} W_{2(n+1)}$$

On écrit alors par la formule de W_{2n} démontrée plus haut :

$$\int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx = \pi \binom{2n}{n} \left(2 - \frac{2n+1}{n+1}\right) = \pi \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1}$$

On reconnaît à droite la formule explicite du n -ième nombre de Catalan C_n . On obtient finalement en divisant par π :

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx$$

■

Corollaire 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^n \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Preuve : Si $n \in \mathbb{N}$, le changement de variables $u = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ bijectif appliqué à la représentation intégrale des nombres de Catalan donne

$$C_n = \frac{2}{\pi} 4^n \int_0^1 u^n \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^n \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

■

1.5 Déterminants de Hankel

L'objet de cette sous-partie est la démonstration d'un résultat au premier abord tout à fait étonnant des nombres de Catalan. Pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut associer les suites $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses déterminants de Hankel successifs : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}, h'_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Pour la suite des nombres de Catalan, les déterminants de Hankel successifs vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{vmatrix} = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix} = 1.$$

Pour élaborer cette démonstration, nous devons prouver des résultats intermédiaires d'algèbre bilinéaire, introduits dans [5].

Définition 16. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On appelle système orthogonal toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unitaires tels que

- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n .

Proposition 17. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Sous réserve d'existence, le système orthogonal $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique.

Preuve : Tout d'abord, considérons donc un système orthogonal $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(V_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base. En effet, $(V_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnée en degré (donc libre). C'est donc, par argument de dimension, une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, si $n > 0$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ on trouve alors $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$, tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i V_i$ par ce qui précède. Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire et orthogonalité des $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\langle P | V_n \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \langle V_i | V_n \rangle = 0$$

Le calcul précédent démontre donc que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}(V_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons donc pour conclure la preuve qu'il existe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un autre système orthogonal. Alors, on montre de la même manière que $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \text{Vect}(W_n)$, d'où $\text{Vect}(V_n) = \text{Vect}(W_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc V_n et W_n sont donc colinéaires. Mais étant tous les deux unitaires, nécessairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = W_n$.

D'où l'unicité du système orthogonal, sous réserve d'existence. ■

Proposition 18. Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Sous réserve d'existence, on considère l'unique système orthogonal $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associé à ce produit scalaire. Alors,

$$\det(\langle X^{i-1} | X^{j-1} \rangle)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \det \begin{pmatrix} \langle 1 | 1 \rangle & \dots & \langle 1 | X^n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X^n | 1 \rangle & \dots & \langle X^n | X^n \rangle \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$$

Preuve : Commençons par poser pour tout $n \in \mathbb{N}$ les matrices suivantes :

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle 1 | 1 \rangle & \dots & \langle 1 | X^n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X^n | 1 \rangle & \dots & \langle X^n | X^n \rangle \end{pmatrix}$$

$$G'_n = (\langle V_{i-1} | V_{j-1} \rangle)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} \langle V_0 | V_0 \rangle & \dots & \langle V_0 | V_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V_n | V_0 \rangle & \dots & \langle V_n | V_n \rangle \end{pmatrix}$$

On considère enfin $Q_n = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la famille (V_0, \dots, V_n) dans la base $(1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, comme $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \deg V_i \leq i$, on déduit que Q_n est triangulaire supérieure. De plus (V_0, \dots, V_n) étant une famille de polynômes unitaires, Q_n est alors de la forme suivante :

$$Q_n = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & & & V_n \\ 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \dots \\ X^n \end{matrix}$$

Clairement, $\det Q_n = 1$.

Les formules de changement de bases nous permettent d'écrire $G'_n = {}^t Q_n G_n Q_n$ mais écrivons-le rigoureusement pour s'en convaincre. Le terme (i, j) de ${}^t Q_n G_n Q_n$ est :

$$\sum_{l=1}^{n+1} {}^t q_{i,l} \sum_{k=1}^{n+1} \langle X^{l-1} | X^{k-1} \rangle q_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} q_{l,i} \langle X^{l-1} | \sum_{k=1}^{n+1} q_{k,j} X^{k-1} \rangle = \langle \sum_{l=1}^{n+1} q_{l,i} X^{l-1} | \sum_{k=1}^{n+1} q_{k,j} X^{k-1} \rangle = \langle V_{i-1} | V_{j-1} \rangle$$

On a donc bien $G'_n = {}^t Q_n G_n Q_n$.

Alors, $\det G'_n = \det Q_n \det G_n \det Q_n = 1 \times \det G_n \times 1 = \det G_n$. Or, $G'_n = \text{diag}(\|V_1\|^2, \dots, \|V_n\|^2)$. On conclut donc finalement :

$$\left| \begin{pmatrix} \langle 1 | 1 \rangle & \dots & \langle 1 | X^n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X^n | 1 \rangle & \dots & \langle X^n | X^n \rangle \end{pmatrix} \right| = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$$

■

Proposition 19. *L'application*

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Preuve : Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$. Montrons d'abord que cette intégrale a bien un sens. D'abord, $x \rightarrow P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1[$.

De plus,

$$P(4x)Q(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \mathcal{O}_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, on déduit la convergence de l'intégrale.

La linéarité de l'intégrale et la commutativité du produit sur les réels permettent de conclure quant à la symétrie et à la bilinéarité de φ .

$$\varphi(P, P) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx \geq 0$$

car $x \rightarrow P(4x)^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est positive sur $]0,1[$.

Enfin, si $\varphi(P, P) = 0$, comme $x \rightarrow P(4x)^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, on déduit que pour tout $x \in]0,1[$,

$$P(4x)^2 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = 0$$

D'où pour tout $x \in]0,1[$, $P(4x) = 0$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines. Donc $P = 0$.

Donc, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. ■

Théorème 20. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{vmatrix} = 1$$

Preuve : Nous allons détailler avec précision les étapes de cette preuve afin d'assimiler pleinement la logique du raisonnement. Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini dans la **Proposition 19**. On le note

$\langle \cdot | \cdot \rangle$. L'idée de définir un tel produit scalaire est de remarquer, en vertu du **Corollaire 15**, que pour $1 \leq i, j \leq n$,

$$\langle X^{i-1} | X^{j-1} \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4x)^{i+j-2} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = C_{i+j-2} \quad (*)$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1 | 1 \rangle & \cdots & \langle 1 | X^n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X^n | 1 \rangle & \cdots & \langle X^n | X^n \rangle \end{pmatrix}$$

On aimerait donc démontrer l'existence d'un système orthogonal ; et les **Proposition 17** et **Proposition 18** nous permettraient alors de considérer $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'unique système orthogonal associé à ce produit scalaire et d'écrire :

$$\det \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2.$$

Si de plus $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale, on aurait

$$\det \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{pmatrix} = 1$$

qui est le résultat voulu.

Une première piste pour trouver les polynômes orthogonaux serait de considérer les premiers termes de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt ; nous serions alors assurés de l'orthogonalité des polynômes d'une part, et d'autre part nous aurions alors

$$\prod_{i=0}^n \|V_i\|^2 = 1$$

Etant précisément ce que l'on cherche. Il resterait à démontrer qu'ils sont unitaires.

En l'occurrence, les premiers termes de l'algorithme de Gram-Schmidt sont $1, X-1, X^2-3X+1, X^3-5X^2+6X-1$. En effet, par exemple pour le deuxième terme, il suffit de calculer de la manière suivante :

$$X^1 - \sum_{i=0}^{1-1} \langle V_i | X^1 \rangle V_i = X^1 - \langle 1 | X^1 \rangle \cdot 1 \stackrel{(*)}{=} X - C_1 \cdot 1 = X - 1$$

et

$$\left\| X^1 - \sum_{i=0}^{1-1} \langle V_i | X^1 \rangle V_i \right\| = \sqrt{\langle X-1 | X-1 \rangle} = \sqrt{\langle X | X \rangle - 2\langle 1 | X \rangle + \langle 1 | 1 \rangle} \stackrel{(*)}{=} \sqrt{C_2 - 2C_1 + C_0} = \sqrt{2 - 2 + 1} = 1$$

Remarquons que ces quatre premiers polynômes sont unitaires.

On trouve les prochains termes de la même manière, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire. En vertu des propriétés sur les polynômes orthogonaux présentes dans le livre de T.S. Chihara (Référence [4]), on aimerait

trouver une relation de récurrence d'ordre deux reliant ces polynômes entre eux. Avec les quatre premiers termes de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt calculés, on obtient alors :

$$\begin{aligned} X^2 - 3X + 1 &= (X - 1)(X - 2) - 1 \\ X^3 - 5X^2 + 6X - 1 &= (X^2 - 3X + 1)(X - 2) - (X - 1) \end{aligned}$$

De l'étude des premiers termes de l'orthonormalisé de Gram-Schmidt, nous construisons alors la famille de polynômes suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} V_0 = 1, & V_1 = X - 1 \\ V_{n+2} = (X - 2)V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

Étudions cette famille, et montrons qu'elle convient. Nous devons donc démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est unitaire, de norme égale à un, de degré n , et que $i \neq j \Rightarrow \langle V_i | V_j \rangle = 0$. Néanmoins, si $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 V_i(4x)V_j(4x) \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Le calcul risque d'être difficile car nous n'avons pas d'informations sur les coefficients des V_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui nous permettraient d'utiliser les nombres de Catalan avec la bilinéarité du produit scalaire. On peut essayer de simplifier l'intégrale avec le changement de variables assez naturel $x = \cos(\theta)^2$ bijectif. On obtient alors :

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 V_i(4 \cos(\theta)^2)V_j(4 \cos(\theta)^2) \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)^2}}{\sqrt{\cos(\theta)^2}} (-2 \sin \theta \cos \theta) d\theta$$

D'où, par positivité du cosinus et du sinus sur l'intervalle considéré :

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [V_i(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta][V_j(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta] d\theta \quad (**)$$

Voyons si pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on peut simplifier $V_n(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta$ (qui rappelle d'ailleurs les polynômes de Tchebychev). Essayons avec $n = 0, 1$.

$$V_0(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = \sin \theta$$

$$\begin{aligned} V_1(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta &= (4 \cos(\theta)^2 - 1) \sin \theta = 4(1 - \sin(\theta)^2) \sin \theta - \sin \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin(\theta)^2 \\ &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que $V_n(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = \sin(2n + 1)\theta$, $n \in \mathbb{N}$. Montrons tout cela par récurrence double.

Soit P_n le prédicat tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $V_n(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = \sin(2n + 1)\theta$; $\deg V_n = n$; V_n est unitaire "

Initialisation : Cela a déjà été fait précédemment. P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies. Montrons déjà que $\deg V_{n+2} = n + 2$.

$$\deg V_{n+2} = \deg((X - 2)V_{n+1} - V_n)$$

Or, $\deg((X-2)V_{n+1}) = \deg(X-2) + \deg V_{n+1} = 1 + n + 1 = n + 2$ par hypothèse de récurrence. Encore par hypothèse de récurrence, $\deg V_n = n$. La somme d'un polynôme de degré n avec un de degré $n + 2$ donne nécessairement un polynôme de degré $n + 2$. Donc, $\deg V_{n+2} = n + 2$.

Montrons ensuite que V_{n+2} est unitaire. $V_{n+2} = (X-2)V_{n+1} - V_n$. Le monôme de degré $n + 2$ est fourni par $(X-2)V_{n+1}$. Or, V_{n+1} est unitaire par hypothèse de récurrence. Comme $X-2$ est également unitaire, V_{n+2} est unitaire.

Enfin, $V_{n+2}(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = ((4 \cos(\theta)^2 - 2)V_{n+1}(4 \cos(\theta)^2) - V_n(4 \cos(\theta)^2)) \sin \theta$. Donc, par hypothèse de récurrence,

$$V_{n+2}(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = 2 \cos 2\theta \sin(2n+3)\theta - \sin(2n+1)\theta$$

Or, $2 \cos 2\theta \sin(2n+3)\theta = \sin((2n+3)\theta + 2\theta) + \sin((2n+3)\theta - 2\theta)$.

Donc, $V_{n+2}(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta = \sin((2n+5)\theta) + \sin(2n+1)\theta - \sin(2n+1)\theta = \sin((2n+5)\theta)$.

Finalement, P_{n+2} est vraie.

Mais alors, si $i, j \in \mathbb{N}$, par (**):

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [V_i(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta][V_j(4 \cos(\theta)^2) \sin \theta] d\theta$$

D'où par P_i et P_j :

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2i+1)\theta \sin(2j+1)\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(i-j)\theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(i+j+1)\theta) d\theta \right]$$

Si $i \neq j$, on peut primitiver usuellement $\theta \mapsto \cos(2(i-j)\theta)$ avec $\theta \mapsto \frac{1}{2(i-j)} \sin(2(i-j)\theta)$. Alors,

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2(i-j)} \sin((i-j)\pi) + \frac{1}{2(i+j+1)} \sin((i+j+1)\pi) \right] = 0$$

car le sinus d'un multiple entier de π est toujours nul.

Si $i = j$,

$$\langle V_i | V_j \rangle = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(2i+1)\theta) d\theta = 1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2(2i+1)} \sin((2i+1)\pi) \right] = 1$$

Donc, $\langle V_i | V_i \rangle = \|V_i\|^2 = 1$. D'où $\|V_n\| = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est unitaire, de norme égale à un, de degré n , et si $i \neq j \Rightarrow \langle V_i | V_j \rangle = 0$. Donc, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal. Pour conclure, par les **Proposition 17** et **Proposition 18**: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$$

Mais $\prod_{i=0}^n \|V_i\|^2 = 1$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n} \end{vmatrix} = 1$$

■

Théorème 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix} = 1$$

Preuve : Gabor Szegő ([16]) nous donne l'idée, par son étude des polynômes orthogonaux, de considérer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

$D_n(X)$ est un polynôme en X (il suffit de développer par rapport à la dernière ligne pour s'en apercevoir). Remarquons que

$$D_n(0) = (-1)^n \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

Si on démontre que $D_n(0) = (-1)^n$, le résultat voulu est démontré. Montrons que $D_n = V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est le système orthogonal introduit dans la preuve du théorème précédent (on introduit donc le même produit scalaire, accompagné de la même notation). Notons $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice mineure de D_n , où l'on a supprimé la i -ème ligne et la j -ème colonne de D_n . Alors, en développant selon la dernière ligne,

$$D_n(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+1+j+1} X^j \Delta_{n+1,j+1}$$

Si $k < n$, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle D_n(X) | X^k \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+1+j+1} \Delta_{n+1,j+1} \langle X^j | X^k \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+1+j+1} \Delta_{n+1,j+1} C_{j+k} = \det M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-1} \\ C_k & C_{k+1} & \cdots & C_{k+n} \end{pmatrix}$$

par formule de développement selon la dernière ligne. Mais comme $k < n$, deux lignes sont identiques. Donc, $\det M = 0$, d'où $\langle D_n(X) \mid X^k \rangle = 0$.

Clairement, $\deg D_n(X) = n$. Donc, en suivant exactement la même preuve que celle de la **Proposition 17** on

déduit que D_n et V_n sont colinéaires. Mais, $\Delta_{n+1,n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-2} \end{vmatrix} = 1$, par le théorème

précédent.

Et $\Delta_{n+1,n+1}$ est le coefficient du monôme de plus haut degré de D_n (par formule de développement selon la dernière ligne). Donc, D_n est unitaire. Nécessairement, $V_n = D_n$.

Soit P_n le prédicat tel que $\forall m \in \mathbb{N}, P_m: "V_m(0) = (-1)^m"$. Montrons-le par récurrence double.

Initialisation : $V_0 = 1$. Donc, $V_0(0) = 1$. $V_1 = X - 1$. Donc, $V_1(0) = -1$. Donc, P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, Supposons P_m vraie. Alors,

$$V_{m+2}(0) = (0 - 2)V_{m+1}(0) - V_m(0)$$

D'où, par hypothèse de récurrence,

$$V_{m+2}(0) = -2(-1)^{m+1} - (-1)^m = (-1)^{m+1}(-2 + 1) = (-1)^{m+2}$$

Donc, P_{m+2} est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(0) = V_n(0) = (-1)^n$.

Comme

$$D_n(0) = (-1)^n \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ C_2 & C_3 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-1} \end{vmatrix} = 1$$

■

Nous pouvons même démontrer que les nombres de Catalan forment l'unique suite vérifiant ces deux propriétés portant sur les déterminants de Hankel [15].

1.6 Série des inverses

Le comportement asymptotique des nombres de Catalan nous démontre certes la divergence grossière de $\sum_{n \in \mathbb{N}} C_n$ (qui est parfaitement évidente) ; mais il nous démontre donc également la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/C_n$. Nous détaillerons cette convergence plus bas.

Cette ultime section a donc pour objectif de déterminer la valeur de cette série, qui donne alors un beau résultat des nombres de Catalan.

Définition/Proposition 22. *On introduit les fonctions gamma et bêta définies pour $x, y > 0$:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

On rappelle que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Et si $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Théorème 23. *La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n}$ converge, et de plus*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_n} = 2 + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$$

*Preuve : Concluons d'abord quant à la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/C_n$. La **Propriété 7** nous permet d'écrire que*

$$\frac{1}{C_n} \sim \frac{n\sqrt{n\pi}}{4^n} = \underset{n \rightarrow \infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

par croissance comparée ; donc, par comparaison à une série de Riemann (quantités positives), on conclut que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} < \infty$$

Pour le calcul de la série, nous ne développerons pas les calculs par soucis de lisibilité, étant fastidieux et sans aucune difficulté (cf. [14]). L'idée de la preuve est de faire intervenir une intégrale à l'aide de la fonction bêta. Alors, par la proposition précédente,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{n!^2}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) \frac{n!^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)}$$

Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1) B(n+1, n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n (1-t)^n (n+1)(2n+1) dt$$

Or, les termes étant tous positifs, par le théorème de Fubini-Tonelli (il suffit d'interpréter la série comme une intégrale de Lebesgue munie de la mesure de comptage) :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n (1-t)^n (n+1)(2n+1) dt$$

Introduisons la série entière suivante, de rayon de convergence égal à 1 (démontrable aisément par le critère de D'Alembert) :

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1)z^n$$

Alors, en développant, par théorèmes de dérivation et de primitivation des séries entières (Référence [14]), on peut montrer que si $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(2n+1)z^n = \frac{3z+1}{(1-z)^3}$$

Comme pour tout $t \in]0,1[$, $|t(1-t)| < 1$, on déduit que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = \int_0^1 \frac{3t(1-t)+1}{(1-t(1-t))^3} dt = \int_0^1 \frac{-3t^2+3t+1}{(t^2-t+1)^3} dt$$

Or, nous pouvons trouver une primitive de

$$t \mapsto \frac{-3t^2+3t+1}{(t^2-t+1)^3}$$

En l'occurrence comme indiqué dans [14], il s'agit de :

$$t \mapsto \frac{1}{9} \left(\frac{3(2t-1)(t^2-t+3)}{(t^2-t+1)^2} + 4\sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

Par théorème fondamental de l'analyse, on obtient donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = 1 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{9 \cdot 6} - \left(-1 - \frac{4\sqrt{3}\pi}{9 \cdot 6} \right) = 2 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{9 \cdot 3}$$

D'où, on conclut :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{C_n} = 2 + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}}$$

■

Chapitre 2

Interprétations combinatoires des nombres de Catalan

2.1 Méthodes d'énumération symbolique

Il s'agira dans cette première sous-partie de construire des outils combinatoires généraux. Nous nous inspirerons grandement de l'ouvrage *Analytic Combinatorics* de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick [6]. Dans toute cette partie, $z \in \mathbb{C}$.

Définition 24 (Classe combinatoire). Une **classe combinatoire** $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ est un couple composé d'un ensemble fini ou dénombrable \mathcal{A} sur lequel est défini une fonction que l'on appellera **norme** ou **taille** notée $|\cdot|_{\mathcal{A}}$, ou simplement $|\cdot|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, satisfaisant deux axiomes :

- (i) pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ la norme de α est un entier positif (i.e. $|\alpha| \in \mathbb{N}$) ;
- (ii) l'image réciproque par la norme de chaque entier positif est finie ($\forall n \in \mathbb{N}, \text{Card } |\cdot|^{-1}(\{n\}) < \infty$)

Pour une classe combinatoire \mathcal{A} donnée nous noterons \mathcal{A}_n l'ensemble des éléments de \mathcal{A} de norme $n \in \mathbb{N}$. Le deuxième axiome des classes combinatoires nous assure donc que \mathcal{A}_n est fini, nous posons alors $A_n = \text{Card } \mathcal{A}_n$.

Définition 25 (Suite d'énumération). Soit $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ une classe combinatoire. La **suite d'énumération** est la suite d'entiers $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 26 (Nombres binaires). Posons $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et \mathcal{W} l'ensemble de tous les mots finis formés à partir de l'alphabet \mathcal{A} , dont naturellement le mot vide ε . Montrons que \mathcal{W} est une classe combinatoire.

$$\mathcal{W} = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots, 1011001, \dots\}$$

Les éléments de \mathcal{W} peuvent être ordonnés d'une manière canonique : on les trie d'abord par ordre croissant du nombre de lettres ; et pour les mots composés du même nombre de lettres, disons n , on commence par $00\dots 0$ (avec n zéros) et on range les autres en additionnant 1 au précédent, avec les règles de l'addition en base 2. Par exemple pour $n = 3$: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. En suivant cet ordre, les premiers termes de \mathcal{W} sont alors

$\varepsilon,$
 $0, 1,$
 $00, 01, 10, 11,$
 $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,$
 $0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111,$
 \dots

Chaque élément de \mathcal{W} peut donc être caractérisé de manière unique par le rang qu'il occupe dans \mathcal{W} ainsi ordonné. Donc \mathcal{W} est en bijection avec \mathbb{N} . On déduit que \mathcal{W} est dénombrable. Considérons ensuite l'application $|\cdot|$ qui à tout $\alpha \in \mathcal{W}$ renvoie sa longueur (le nombre de lettres qui composent α). Il est clair que $|\alpha| \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{W}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Card } \mathcal{W}_n = 2^n < \infty$. Donc, $|\cdot|$ est bien une norme sur \mathcal{W} . Finalement, $(\mathcal{W}, |\cdot|)$ est bien une classe combinatoire et sa suite d'énumération $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $W_n = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 27 (Classes isomorphes). Soit $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ deux classes combinatoires. On dit que ces deux classes sont isomorphes au sens combinatoire, et on note $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}}) \cong (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ ou $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, si, et seulement si, elles ont même suite d'énumération. De manière équivalente, $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}}) \cong (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ si, et seulement si, il existe $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bijective telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $|\Psi(\alpha)|_{\mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}}$. On dit que Ψ préserve la norme et que Ψ est un isomorphisme combinatoire.

Remarque 28. En reprenant les mêmes notations introduites dans la définition précédente, écrire que pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $|\Psi(\alpha)|_{\mathcal{B}} = |\alpha|_{\mathcal{A}}$ est équivalent à écrire que pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, $|\beta|_{\mathcal{B}} = |\Psi^{-1}(\beta)|_{\mathcal{A}}$: il suffit de choisir $\alpha = \Psi^{-1}(\beta)$.

Définition 29 (Fonction Génératrice Ordinaire). La Fonction Génératrice Ordinaire (FGO) d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série génératrice formelle

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

Alors, la Fonction Génératrice Ordinaire d'une classe combinatoire $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ est la série formelle

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Card}(\mathcal{A}_n) z^n$$

De manière équivalente, on peut réécrire cette série :

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}$$

Définition 30 (Produit cartésien de classes). Soit $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ deux classes combinatoires. On définit $(\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = \{(\beta, \gamma) \mid \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}$$

Et pour $\alpha = (\beta, \gamma)$ avec $\beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}$, $|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}}$.

Propriété 31. Soit $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ deux classes combinatoires, de suites d'énumérations respectives $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$; et de FGO respectives B et C . Alors, $(\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ est une classe combinatoire et sa suite d'énumération $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie,

$$A_n = \sum_{k=0}^n B_k C_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}$$

De plus, sa FGO est :

$$A(z) = B(z) \cdot C(z)$$

Preuve : Comme \mathcal{B} et \mathcal{C} sont toutes deux au plus dénombrables par définition d'une classe combinatoire, on déduit que $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ est également au plus dénombrable. Il est ensuite clair que pour $\alpha = (\beta, \gamma)$ avec $\beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}$,

$$|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |\gamma|_{\mathcal{C}} \in \mathbb{N}$$

car $|\beta|_{\mathcal{B}} \in \mathbb{N}$ et $|\gamma|_{\mathcal{C}} \in \mathbb{N}$ par le premier axiome des normes sur une classe combinatoire.

Enfin, si $|\alpha|_{\mathcal{A}} = n \in \mathbb{N}$ et $|\beta|_{\mathcal{B}} = k \in \mathbb{N}$ on peut déduire que $|\gamma|_{\mathcal{C}} = n - k$. Nécessairement $k \leq n$.

Donc, il est clair que

$$A_n = \sum_{k=0}^n B_k C_{n-k}$$

Par produit de Cauchy on déduit que

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n B_k C_{n-k} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right) = B(z) \cdot C(z)$$

■

Définition/Propriété 32 (Union de classes). *Soit $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ deux classes combinatoires. On définit la classe $(\mathcal{A}, |\cdot|_{\mathcal{A}})$ qui est l'union de ces deux classes de la manière suivante :*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \text{ avec } \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$$

et pour $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$|\alpha|_{\mathcal{A}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathcal{B}} & \text{si } \alpha \in \mathcal{B} \\ |\alpha|_{\mathcal{C}} & \text{si } \alpha \in \mathcal{C} \end{cases}$$

Les éléments de \mathcal{A} de norme $n \in \mathbb{N}$ sont donc précisément ceux de \mathcal{B} et ceux de \mathcal{C} de norme n . Il est alors clair que si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement les suites d'énumération de \mathcal{B} et de \mathcal{C} , la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'énumération de \mathcal{A} vérifie

$$A_n = B_n + C_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Avec les notations canoniques des FGO, on déduit que

$$A(z) = B(z) + C(z)$$

Propriété 33. Deux classes combinatoires sont isomorphes si, et seulement si, elles ont même Fonction Génératrice Ordinaire.

Preuve : Le sens direct est évident par définition des isomorphismes combinatoires (Définition 27). Le sens réciproque découle directement du théorème d'unicité des séries entières. ■

Définition 34. On appelle **classe neutre** toute classe $\mathcal{E} = \{\odot\}$ contenant un unique élément \odot de norme nulle. Un tel élément est dit **neutre**. On appelle également **classe atomique** toute classe $\mathcal{Z} = \{\blacksquare\}$ contenant un unique élément \blacksquare de norme 1. Un tel élément est appelé **atome**. Il est clair que les FGO respectives de \mathcal{E} et de \mathcal{Z} sont :

$$E(z) = 1 \text{ et } Z(z) = z$$

Dans la suite, on admet l'existence des classes neutres et atomiques (on admet même qu'il en existe au moins un nombre dénombrable).

Nous aimerions créer une forme d'union de classes combinatoires qui n'impose pas que les deux classes soient disjointes. On définit pour cela la somme combinatoire.

Définition 35 (Somme de classes). Soit $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ deux classes combinatoires.

Prenons $\mathcal{E}_{\odot} = \{\odot\}$ et $\mathcal{E}_{\square} = \{\square\}$ deux classes neutres distinctes. On définit alors la somme \mathcal{A} de \mathcal{B} et \mathcal{C} de la manière suivante :

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C} = (\mathcal{E}_{\odot} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{E}_{\square} \times \mathcal{C})$$

Propriété 36. Soit $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{C}, |\cdot|_{\mathcal{C}})$ deux classes combinatoires. Alors, $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ est une classe combinatoire. De plus, avec les notations des suites d'énumération et des FGO habituelle, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = B_n + C_n$$

et

$$A(z) = B(z) + C(z)$$

Preuve : Montrons d'abord de manière générale que pour une classe $(\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ et une classe neutre $\mathcal{E} = (\{e\}, |\cdot|_{\mathcal{E}})$:

$$\mathcal{E} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{E} \cong \mathcal{B} \tag{*}$$

Posons

$$\Psi : \begin{array}{l} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{E} \\ \beta \mapsto (\beta, e) \end{array}$$

Il est clair que Ψ est une bijection. De plus, soit $\beta \in \mathcal{B}$, tel que $|\beta|_{\mathcal{B}} = n \in \mathbb{N}$:

$$|\Psi(\beta)|_{\mathcal{B} \times \mathcal{E}} = |(\beta, e)|_{\mathcal{B} \times \mathcal{E}} = |\beta|_{\mathcal{B}} + |e|_{\mathcal{E}} = n + 0 = n = |\beta|_{\mathcal{B}}$$

Donc Ψ conserve la norme. Donc, $\mathcal{B} \times \mathcal{E} \cong \mathcal{B}$. On montre de la même manière que $\mathcal{E} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{B}$.

Ensuite, par les opérations sur les classes combinatoires définies plus haut, il est clair que $(\mathcal{E}_\odot \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{E}_\square \times \mathcal{C})$ est une classe combinatoire. De plus, par les propriétés précédentes sur les unions et produits de classes, si $(B'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite d'énumération de $\mathcal{E}_\odot \times \mathcal{B}$ et $(C'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ celle de $\mathcal{E}_\square \times \mathcal{C}$ alors :

$$A_n = B'_n + C'_n \stackrel{(*)}{=} B_n + C_n$$

■

Définition 37 (Séquences). On écrit $\mathcal{A} = \text{Seq}(\mathcal{B})$ avec \mathcal{B} une classe combinatoire **ne possédant pas d'éléments de norme nulle** lorsque \mathcal{A} est l'ensemble des suites finies d'éléments de \mathcal{B} . En d'autres termes, avec une classe neutre \mathcal{E} ,

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{B} + (\mathcal{B} \times \mathcal{B}) + (\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}) + \dots$$

De manière équivalente,

$$\mathcal{A} = \{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l) \mid l \in \mathbb{N}; \beta_i \in \mathcal{B}, \forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket\}$$

Avec la remarque suivante, il est clair que \mathcal{A} est une classe combinatoire (\mathcal{A} est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables) avec la norme canonique associée :

$$|(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)|_{\mathcal{A}} = |\beta_1|_{\mathcal{B}} + \dots + |\beta_l|_{\mathcal{B}}$$

Remarque 38. Si \mathcal{B} contenait un élément de norme nulle, alors \mathcal{A} posséderait une infinité d'éléments de norme donnée ; ceci contredit le deuxième axiome des normes, d'où l'importance d'exclure ce cas.

Propriété 39. Si $\mathcal{A} = \text{Seq}(\mathcal{B})$ avec \mathcal{B} une classe combinatoire ne possédant pas d'éléments de norme nulle, alors, avec les notations canoniques des FGO :

$$A(z) = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Preuve : Par les propriétés sur les sommes et produits de classes combinatoires,

$$A(z) = 1 + B(z) + B(z)^2 + \dots = \frac{1}{1 - B(z)}$$

■

Exemple 40 (Nombres binaires). Posons $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et \mathcal{W} l'ensemble de tous les mots finis formés à partir de l'alphabet \mathcal{A} , dont naturellement le mot vide ε . La classe \mathcal{A} contient deux éléments de norme 1 avec la même norme développée dans l'**Exemple 26**. Donc, par définition des séquences,

$$\mathcal{W} = \text{Seq}(\mathcal{A})$$

Ainsi, \mathcal{W} est une classe combinatoire et sa FGO vérifie :

$$W(z) = \frac{1}{1 - A(z)} = \frac{1}{1 - 2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

On retrouve bien le résultat concernant la suite d'énumération de \mathcal{W} .

2.2 Découpage en triangles d'un polygone convexe

Nous abordons en premier lieu l'application des nombres de Catalan au problème de dénombrement concernant le découpage en triangles d'un polygone convexe. Historiquement, c'est en effet ce premier problème qui a poussé en 1751 le mathématicien Leonhard Euler à décrire les nombres de Catalan.

Définition 41 (Polygone convexe). Un **polygone convexe** est un polygone vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) deux côtés non consécutifs ne se rencontrent pas ;
- (ii) deux côtés consécutifs n'ont en commun que l'un de leurs sommets ;
- (iii) l'intérieur du polygone est un ensemble convexe

Deux polygones convexes sont égaux s'ils sont superposables à rotation près.

Exemple 42. Les figures suivantes sont des polygones convexes :

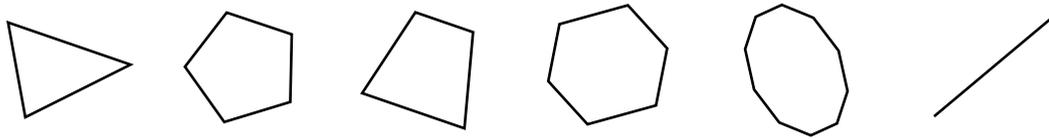


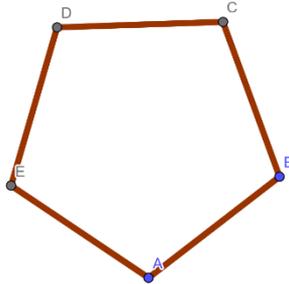
Figure 1. Exemples de polygones convexes

Remarque 43. Soulignons d'une part qu'il n'est pas nécessaire que les côtés soient de longueur égale, et d'autre part qu'un 2-gone (un polygone formé par deux sommets i.e. un segment) est convexe car son intérieur est vide et par convention l'ensemble vide est convexe.

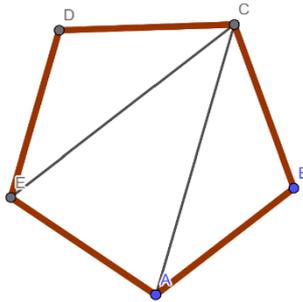
Plus généralement, nous appellerons un n -gone ($n \in \mathbb{N}$) un polygone formé par n sommets. Par exemple, un carré est un 4-gone. Ainsi, la notion de polygone convexe n'a de sens que pour $n \geq 2$. Dans la suite, lorsque nous mentionnerons un n -gone convexe dans le cadre des triangulations – la définition suit plus bas – nous nous référerons au n -gone convexe régulier dont on numérote les sommets de 0 à $n - 1$ (ou avec des lettres rangées selon l'ordre alphabétique) dans le sens antihoraire. On choisit le premier sommet à numéroté de manière arbitraire car deux polygones convexes sont égaux s'ils sont superposables à rotation près. Ce n'est pas une simplification du problème de dénombrement des triangulations d'un polygone convexe car il suffit de savoir le faire sur un seul polygone convexe pour pouvoir le faire sur tous. En effet, cela revient plus rigoureusement à introduire \mathfrak{R} la relation qui vérifie : si \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont deux polygones convexes : $\mathbb{P}_1 \mathfrak{R} \mathbb{P}_2 \Leftrightarrow \mathbb{P}_1$ et \mathbb{P}_2 ont même nombre de sommets. Il est clair que \mathfrak{R} est réflexive, symétrique et transitive ; donc il s'agit bien d'une relation d'équivalence. On peut alors quotienter l'ensemble des polygones convexes par la relation d'équivalence \mathfrak{R} . On prend donc le n -gone convexe régulier comme représentant de chaque classe d'équivalence.

Définition 44 (Triangulation). Soit le $(n + 2)$ -gone convexe régulier ($n \in \mathbb{N}$). Une **triangulation** de ce polygone convexe est une décomposition maximale de ce dernier en n triangles d'intérieurs disjoints.

Exemple 45. Considérons le 5-gone convexe suivant :



Alors, une triangulation de ce polygone est par exemple la décomposition suivante :



On note cette décomposition dans un ensemble de cette forme : $\{ABC, ACE, CDE\}$.

Le polygone convexe initial a bien été décomposé en trois triangles d'intérieurs disjoints (et donc dont la réunion donne le polygone convexe choisi en premier lieu).

Exemple 46. On peut alors s'intéresser au nombre de façons différentes de trianguler un polygone convexe. Les voici pour le triangle, le carré, le pentagone, l'hexagone, et l'heptagone répertoriées dans le livre mentionné plus haut de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick [6] :

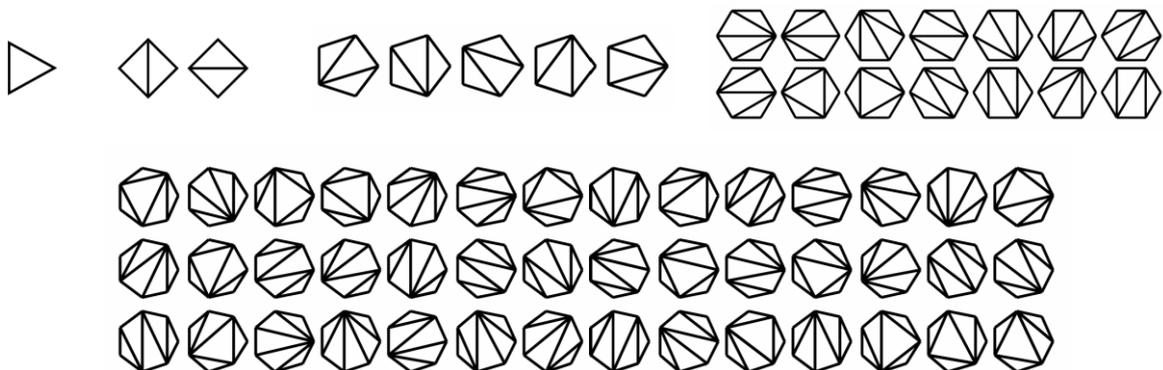


Figure 2. Toutes les triangulations possibles du n -gone pour $n \in \{3,4,5,6,7\}$

On remarque alors que si T_n est le nombre de façon de trianguler un $(n + 2)$ -gone convexe ($n \in \mathbb{N}$) alors $T_0 = 1, T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 5, T_4 = 14, T_5 = 42$.

Lemme 47. On note \mathcal{T} l'ensemble des triangulations d'un $(n+2)$ -gone convexe ($n \in \mathbb{N}$) ; $(\mathcal{T}, | \cdot |)$ une classe combinatoire des triangulations, avec la norme $| \cdot |$ qui à une triangulation associe le nombre de triangles qui la composent. Soit $\mathcal{E} = \{e\}$ la classe de la triangulation d'un 2-gone i.e. une triangulation « vide » de norme nulle (une classe neutre) et Δ la classe de la triangulation d'un 3-gone i.e. une classe atomique car il existe une et unique manière de trianguler un 3-gone : le 3-gone lui-même. Alors,

$$\mathcal{T} \cong \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \Delta \times \mathcal{T}$$

Preuve : Par définition de la triangulation et de $| \cdot |$ il est clair que $(\mathcal{T}, | \cdot |)$ est une classe combinatoire. Soit $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}$. Cette triangulation est associée au polygone convexe à $n+2$ sommets \mathbb{P}_{n+2} (« au » polygone et non « à un » polygone en vertu du paragraphe concernant la relation d'équivalence) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $\mathfrak{t} = e$. Sinon, numérotons ses sommets dans le sens anti-horaire de 0 à $n+1$. Appelons « racine » l'arête contenant les sommets 0 et 1. La racine appartient nécessairement à un et unique triangle δ de la triangulation \mathfrak{t} . Donc $\{\delta\} = \Delta$. Mais, $\mathbb{P}_{n+2} \setminus \delta$ auquel on supprime la racine est formé de deux composantes connexes ω_1, ω_2 (l'une ou l'autre éventuellement un segment) qui sont donc toutes deux des polygones convexes. On trouve alors une unique triangulation $\mathfrak{t}_1 \in \mathcal{T}$ (éventuellement égale à e) et une unique triangulation $\mathfrak{t}_2 \in \mathcal{T}$ (éventuellement égale à e) telles que \mathfrak{t}_1 est une triangulation de ω_1 , \mathfrak{t}_2 est une triangulation de ω_2 et

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \sqcup \{\delta\} \sqcup \mathfrak{t}_2$$

Alors, posons

$$\Psi : \begin{array}{l} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \Delta \times \mathcal{T} \\ \mathfrak{t} \mapsto (\mathfrak{t}_1, \{\delta\}, \mathfrak{t}_2) \end{array}$$

(\mathcal{E} permet de considérer les cas où les polygones convexes ω_1, ω_2 ou même \mathbb{P}_{n+2} sont des segments).

Le paragraphe précédent démontre que : $\forall \mathfrak{t} \in \mathcal{T}, \exists ! (\mathfrak{t}_1, \{\delta\}, \mathfrak{t}_2) \in \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \Delta \times \mathcal{T}, (\mathfrak{t}_1, \{\delta\}, \mathfrak{t}_2) = \Psi(\mathfrak{t})$. Donc, Ψ est une bijection. Vérifions que Ψ conserve la norme. Comme

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \sqcup \{\delta\} \sqcup \mathfrak{t}_2$$

alors $|\mathfrak{t}| = |\mathfrak{t}_1| + |\{\delta\}| + |\mathfrak{t}_2|$ par définition de la norme introduite. Mais par définition de la norme induite sur une somme et un produit cartésien de classes combinatoires,

$$|\Psi(\mathfrak{t})| = |(\mathfrak{t}_1, \{\delta\}, \mathfrak{t}_2)| = |\mathfrak{t}_1| + |\{\delta\}| + |\mathfrak{t}_2| = |\mathfrak{t}|$$

Donc

$$\mathcal{T} \cong \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \Delta \times \mathcal{T}$$

■

Théorème 48. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite d'énumération de $(\mathcal{T}, | \cdot |)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = C_n$$

Preuve : Par le lemme précédent, on a

$$\mathcal{T} \cong \mathcal{E} + \mathcal{T} \times \Delta \times \mathcal{T}$$

Donc si T est la Fonction Génératrice Ordinaire de \mathcal{T} , comme \mathcal{E} est une classe neutre et Δ une classe atomique, par opération sur les FGO :

$$T(z) = 1 + T(z) \times z \times T(z) = 1 + zT(z)^2$$

Alors, $T(z)$ est racine du polynôme $zX^2 - X + 1$. On se ramène alors à la preuve du **Théorème 3**. et on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

■

2.3 Chemins de Dyck

Définition 49 (Chemin). Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle **chemin** de longueur m tout m -uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$. On pose alors $s_\gamma(0) = 0$, et pour tout $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$s_\gamma(n) = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

On peut représenter le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(n, s_\gamma(n))$, $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

Exemple 50. Le chemin débutant par $\gamma = (1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, \dots)$ se représente de la manière suivante :

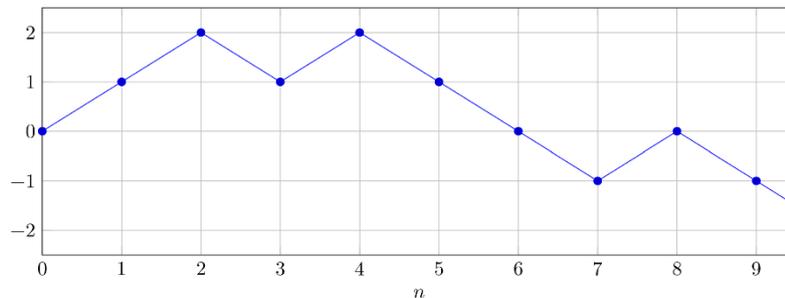


Figure 3. Exemple de chemin [5]

Définition 51 (Chemin de Dyck). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **chemin de Dyck** de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $s_\gamma(k) \geq 0$. Notons D_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$. On pose par convention $D_0 = 1$.

Propriété 52. Le nombre D_n de chemins de Dyck de longueur $2n$ est majoré par 4^n .

Preuve : Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ est inférieur au nombre de chemins de longueur $2n$. Mais pour tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ il y a deux choix possibles pour chaque γ_i , $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Donc, on dénombre le nombre de chemins de longueur $2n$:

$$\prod_{i=1}^{2n} 2 = 2^{2n} = 4^n$$

On déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D_n \leq 4^n$$

■

Remarque 53. La preuve du **Théorème 3** mentionnait que le rayon de convergence de la série considérée était au moins $1/4$; la propriété précédente permet donc de le justifier, sous réserve bien sûr que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $D_n = C_n$

Propriété 54. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$. On pose :

$$r = \max\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid s_\gamma(2i) = 0\}$$

On suppose que $0 < r < n$, et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$. Alors α et β sont des chemins de Dyck et $\gamma_{2r+1} = +1$ et $\gamma_{2n+2} = -1$.

Preuve : On a d'une part par définition des chemins de Dyck et de r : $0 \leq s_\gamma(2r + 1) = s_\gamma(2r) + \gamma_{2r+1} = \gamma_{2r+1}$.

Donc, $\gamma_{2r+1} = +1$.

D'autre part, $0 = s_\gamma(2n + 2) = s_\gamma(2n + 1) + \gamma_{2n+2}$. D'où $\gamma_{2n+2} = -s_\gamma(2n + 1) \leq 0$.

Donc, $\gamma_{2n+2} = -1$.

Ensuite montrons que α est un chemin de Dyck. On a pour tout $k \in \llbracket 1, 2r \rrbracket$, $s_\alpha(k) = s_\gamma(k) \geq 0$. Et par définition de r , $s_\alpha(2r) = s_\gamma(2r) = 0$. Donc, α est un chemin de Dyck. Montrons enfin pour conclure la preuve que β est un chemin de Dyck. Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n - 2r \rrbracket$,

$$s_\beta(k) = \sum_{i=1}^k \gamma_{2r+1+i} = s_\gamma(2r + 1 + k) - s_\gamma(2r) - \gamma_{2r+1} = s_\gamma(2r + 1 + k) - 1$$

Si $k \in \llbracket 1, 2n - 2r - 1 \rrbracket$, par définition de r , $s_\gamma(2r + 1 + k) > 0$. Donc,

$$s_\beta(k) \geq 0$$

Si $k = 2n - 2r$, $s_\beta(2n - 2r) = s_\gamma(2n + 1) - 1 = s_\gamma(2n + 2) - \gamma_{2n+2} - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$.

Donc, β est un chemin de Dyck. ■

Théorème 55. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n+2$. On pose :

$$r = \max\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid s_\gamma(2i) = 0\}$$

Ou bien $r = 0$, alors $\gamma = (1, \xi, -1)$, où ξ est un chemin de Dyck quelconque de longueur $2n$. Et réciproquement, si un chemin a une telle structure, il est clair que $r = 0$. Il y a donc D_n tels chemins.

Ou bien $r = n$, alors $\gamma = (\xi, 1, -1)$ où ξ est un chemin de Dyck quelconque de longueur $2n$. Et réciproquement. Il y a donc D_n tels chemins.

Ou bien $0 < r < n$, alors par la **Propriété 54**, $\gamma = (\alpha, 1, \beta, -1)$, où α est un chemin de Dyck quelconque de longueur $2r$ et β est un chemin de Dyck quelconque de longueur $2(n-r)$. Et réciproquement. Il y a donc $D_r D_{n-r}$ tels chemins. Alors, comme toutes les valeurs de r possibles peuvent caractériser un chemin de Dyck (et comme $D_0 = 1$),

$$D_{n+1} = D_n + \sum_{r=1}^{n-1} D_r D_{n-r} + D_n = D_0 D_n + \sum_{r=1}^{n-1} D_r D_{n-r} + D_n D_0 = \sum_{r=0}^n D_r D_{n-r}$$

On reconnaît la récurrence convolutionnelle des nombres de Catalan. En appliquant la preuve du **Théorème 3** désormais complète car le rayon de convergence a été démontré plus haut, on conclut :

$$\boxed{D_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}}$$

■

2.4 Principe de réflexion d'André

Nous nous proposons désormais de démontrer ce résultat par une autre preuve utilisant le principe de réflexion de André [11]. Soit alors deux points A et B de coordonnées respectives $(1, 1)$ et $(2n+1, 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Il est alors clair que chaque chemin de A à B qui ne rencontre pas l'axe des abscisses est un chemin de Dyck. On écrit alors

$$D_n = \Omega_n - \Xi_n$$

où Ω_n est le nombre de tous les chemins de A à B et Ξ_n est le nombre de chemins qui rencontrent l'axe des abscisses.

Le principe de réflexion d'André est le suivant : Ξ_n est le nombre de tous les chemins de A^s (le symétrique de A selon l'axe des abscisses) à B . Ceci vaut même si A et B n'ont pas même ordonnée, pourvu qu'ils soient du même côté par rapport à l'axe des abscisses. Démontrons donc ce principe. Soit W un chemin de A à B qui rencontre l'axe des abscisses, et notons C le premier point d'intersection entre W et l'axe des abscisses. À W on associe l'unique chemin composé du chemin

symétrique entre A et C par rapport à l'axe des abscisses (qui donne alors un chemin entre A^s et C) concaténé avec le chemin inchangé entre C et B . Cette application (notons-la ψ) ainsi construite est clairement injective par unicité et involutivité de la symétrie axiale, et associe à un chemin entre A et B qui rencontre l'axe des abscisses un chemin entre A^s et B . De plus, si W' est un chemin de A^s à B alors il rencontre nécessairement l'axe des abscisses par théorème des valeurs intermédiaires. Soit à nouveau C le premier point d'intersection entre W' et l'axe des abscisses. Le chemin W' est alors l'image par ψ de la concaténation du chemin symétrique entre A^s et C par rapport à l'axe des abscisses (qui donne alors un chemin entre A et C) avec le chemin inchangé entre C et B . Cette concaténation donne bien un chemin de A à B qui rencontre l'axe des abscisses (au moins en C). Donc, on déduit la bijectivité de ψ et le principe de réflexion d'André est ainsi démontré.

En toute généralité, prenons d'abord un point A de coordonnées (α_1, α_2) et un point B de coordonnées (β_1, β_2) , avec $\beta_1 \geq \alpha_1$. Pour un chemin donné reliant A à B notons n_+ le nombre de $+1$ et n_- le nombre de -1 . Alors,

$$n_+ + n_- = \beta_1 - \alpha_1$$

et

$$n_+ - n_- = \beta_2 - \alpha_2$$

On déduit alors que tous les tels chemins ont les mêmes n_+ et n_- et

$$n_{\pm} = \frac{\beta_1 - \alpha_1 \pm (\beta_2 - \alpha_2)}{2}$$

Finalement, par définition du coefficient binomial, le nombre de chemins reliant A à B est $\binom{n_+ + n_-}{n_+}$.

Donc, avec A et B de coordonnées respectives $(1,1)$ et $(2n+1, 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$,

$$n_{\pm} = n$$

D'où

$$\Omega_n = \binom{2n}{n}$$

Le principe de réflexion d'André assure alors que Ξ_n est le nombre de tous les chemins de $A^s = (1, -1)$ à $B = (2n+1, 1)$. On a alors dans ce cas $n_+ + n_- = 2n+1 - 1 = 2n$ et

$$n_+ = \frac{2n+1 - 1 + 1 + 1}{2} = n+1$$

Donc,

$$\Xi_n = \binom{2n}{n+1}$$

On obtient pour conclure que

$$D_n = \Omega_n - \Xi_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

2.5 Mots bien parenthésés (ou Mots de Dyck)

Définition 56 (Bon parenthésage). *Un mot fini (dont naturellement le mot vide) formé à partir de l'alphabet $\{(,)\}$ est dit **bien parenthésé** si :*

- (i) *il y a autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes ;*
- (ii) *dans chaque préfixe, il n'y a jamais plus de parenthèses fermantes que de parenthèses ouvrantes*

On dit aussi qu'un tel mot est un **mot de Dyck**.

Exemple 57. *Si $n = 3$, les mots de taille $2n$ suivants sont bien parenthésés :*

$$((())) , (())(), (() ()) , \dots$$

Théorème 58. *Soit \mathcal{P} l'ensemble des mots bien parenthésés. Alors $(\mathcal{P}, | \cdot |)$ est une classe combinatoire où $| \cdot |$ désigne l'application qui à une expression bien parenthésée associe le nombre de parenthèses ouvrantes qui composent cette expression. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ sa suite d'énumération. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$P_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Preuve : Il est clair que $(\mathcal{P}, | \cdot |)$ est une classe combinatoire. Introduisons $(\mathcal{D}, \| \cdot \|)$ la classe combinatoire des chemins de Dyck de la partie précédente, avec pour norme l'application qui à un élément de \mathcal{D} associe le nombre de 1 dans le tuple qui le caractérise. Écrivons naturellement les éléments de \mathcal{P} comme un tuple dont les coordonnées sont des parenthèses ouvrantes ou fermantes. Par exemple, $(() ())$ s'écrit comme élément de \mathcal{P} (on note le tuple entre crochets pour éviter les confusions) :

$$[((, (, (,))]$$

Posons $\Sigma = \{(,)\}$ et

$$\varphi : \begin{array}{l} \Sigma \quad \rightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = (\\ -1 & \text{si } \sigma =) \end{cases} \end{array}$$

L'application φ est bien bijective.

Posons enfin, avec ε le chemin de Dyck vide :

$$\Psi : (\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}) \mapsto \begin{cases} (\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_{2n})) & \text{si } n \geq 1 \\ \varepsilon & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Montrons que $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ est bien définie. Le deuxième axiome des mots bien parenthésés assure en effet que si $(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$ est un mot bien parenthésé alors en posant $\gamma = (\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_{2n}))$, $s_\gamma(2n) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $s_\gamma(k) \geq 0$, qui est bien la définition d'un chemin de Dyck. Donc, $\Psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$ est bien définie. La bijectivité de φ assure directement celle de Ψ .

Montrons que Ψ conserve la norme. Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$ un élément de \mathcal{P} . Alors, comme $\Psi(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$ est un chemin de Dyck, il y a autant de 1 que de -1 dans ce tuple. De même, il y a autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes dans $(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})$. Donc,

$$\|\Psi(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})\| = \|(\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_{2n}))\| = n = |(\sigma_1, \dots, \sigma_{2n})|$$

Donc,

$$(\mathcal{P}, | \cdot |) \cong (\mathcal{D}, \| \cdot \|)$$

On déduit alors par la section 2.3 que la suite d'énumération de $(\mathcal{P}, | \cdot |)$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

■

Il y a donc C_n façons de construire un mot bien parenthésé de longueur $2n$.

2.6 Arbres binaires

Nous introduisons d'abord la notion de graphes pour qu'en découle rigoureusement la définition d'arbre binaire. Les graphes n'étant pas notre sujet d'étude principal, nous admettrons certains résultats, et les résultats démontrés bénéficieront d'une preuve claire mais plus courte. La partie théorique des graphes est largement inspirée du cours de Jean-Pierre Becirspahic [2, 3].

Définition 59 (Graphe non orienté). Un **graphe non orienté** $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini V dont les éléments sont appelés **sommets** et par un ensemble fini E dont les éléments sont appelés **arêtes**. Une arête est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les **extrémités** de cette arête. Si deux sommets sont reliés par une arête, on dit qu'ils sont **adjacents**. Un graphe est dit **simple** lorsqu'aucun sommet n'est adjacent à lui-même. On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets. Le **degré d'un sommet** x est le nombre de sommets qui lui sont adjacents ; on le note $d(x)$. Le **degré d'un graphe** est le degré maximum de

tous ses sommets. Si $a \in V$, alors on note $G \setminus \{a\} = (V \setminus \{a\}, E')$ où E' est l'ensemble E dont on a enlevé toutes les arêtes qui font intervenir le sommet a .

Remarque 60 (Graphe orienté). Un graphe est **orienté** lorsque la paire qui définit une arête est ordonnée ; en d'autres termes, lorsque (a, b) et (b, a) ne représentent pas la même arête avec $a, b \in V$.

Exemple 61. À un même graphe peuvent être attribuées une infinité de représentations graphiques. Par exemple, le graphe non orienté $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ admet ces deux représentations graphiques (parmi d'autres) :

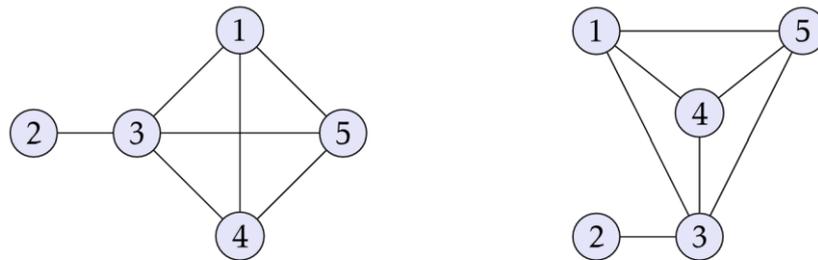


Figure 4. Exemples de graphes [2]

Définition 62 (Chemin). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **chemin** de longueur $k \geq 2$ reliant les sommets a et b est une suite finie (x_1, \dots, x_k) où $x_1 = a$, $x_k = b$, pour tout $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, et pour tout $i, j \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$, si $x_i = x_j$ alors $i = j$.

Définition 63 (Cycle). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **cycle** est un chemin (x_1, \dots, x_k) de longueur $k \geq 3$, tel que $x_1 = x_k$.

Définition 64 (Connexité). Un graphe est dit **connexe** lorsque tout sommet peut être relié à tout autre sommet par un chemin.

Théorème 65. Si $G = (V, E)$ est un graphe non-orienté simple, alors

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot \text{Card}(E)$$

Preuve : Le graphe étant simple, faire la somme des degrés des sommets revient à compter deux fois chaque arête. ■

Lemme 66. Si $G = (V, E)$ est un graphe non-orienté, et si pour tout $v \in V$, $\deg v \geq 2$, alors G possède au moins un cycle.

Preuve : Soit $v_1 \in V$. Le nombre de sommets étant fini, on peut construire une suite finie de sommets v_1, \dots, v_k de la sorte : pour tout $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$,

- (i) $v_i \notin \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$
- (ii) v_i est voisin de v_{i-1}

Lorsque l'algorithme termine – terminaison ainsi justifiée par la finitude de V – on construit donc v_k qui a au moins deux voisins par hypothèse (dont v_{k-1}). Et comme l'algorithme termine sur ce dernier sommet, on déduit que tous les sommets adjacents à v_k sont dans $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$. Prenons-en un qui n'est pas v_{k-1} et notons-le v_j . Alors, le chemin $\{v_j, v_{j+1}, \dots, v_k, v_j\}$ est un cycle.

■

Propriété 67. Un graphe connexe d'ordre n possède au moins $n - 1$ arêtes. Un graphe acyclique d'ordre n possède au plus $n - 1$ arêtes.

Définition 68 (Arbre). Un **arbre** est un graphe connexe et acyclique.

Remarque 69. Les **Propriété 67** et **Lemme 66** nous permettent de conclure qu'un arbre d'ordre n possède exactement $n - 1$ arêtes.

Théorème 70. Si a et b sont deux sommets distincts d'un arbre G , il existe un unique chemin reliant a et b .

Preuve : La connexité de G assure l'existence d'un tel chemin. S'il existait un deuxième chemin, différent du premier ; on pourrait former un cycle en empruntant le premier chemin reliant a et b d'abord, puis le deuxième chemin renversé (reliant donc b et a). Ceci contredirait alors le caractère acyclique de G .

■

Théorème 71. Ce résultat nous permet alors de choisir arbitrairement un sommet r d'un arbre puis d'orienter les arêtes de ce graphe de sorte qu'il existe un chemin reliant r à tous les autres sommets. On parle alors d'**arbre enraciné**.

Preuve : Raisonnons par récurrence sur l'ordre n d'un arbre $G = (V, E)$.

Initialisation : Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.

Hérédité : Si $n \geq 1$, supposons le résultat vrai au rang n . Soit un arbre G d'ordre $n + 1$. L'arbre possède alors n arêtes par la **Remarque 69** et donc par le **Théorème 65** :

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2n$$

Le **Lemme 66** permet de conclure qu'il existe au moins deux sommets de degré 1 pour satisfaire la parité de la somme ci-dessus, donc au moins un qui soit différent de r . Notons ce sommet a . On applique l'hypothèse de récurrence à $G \setminus \{a\}$ qui est bien d'ordre $n - 1$. Ceci nous permet d'enraciner $G \setminus \{a\}$ en r . Il ne reste plus qu'à orienter l'arête supprimée en direction de a pour enraciner G en r .

■

Exemple 72. Voici un exemple d'enracinement :

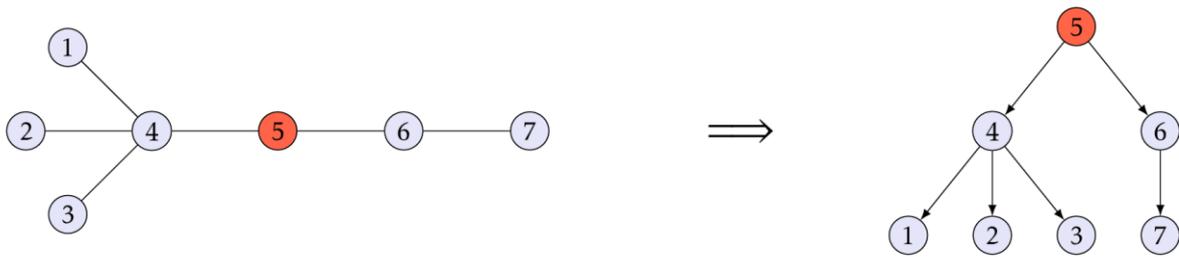


Figure 5. Exemple d'enracinement [2]

Définition 73 (Arbre binaire). Soit E un ensemble de sommets. Les **arbres binaires** étiquetés par E sont des arbres enracinés dont chaque sommet a au plus deux voisins. On les définit par induction en convenant que :

- (i) ε est un arbre binaire à 0 sommet sur E appelé arbre vide.
- (ii) A est un arbre binaire sur E si, et seulement si, il existe $x \in E$ et F_g, F_d deux arbres binaires disjoints étiquetés par E tels que $A = (F_g, x, F_d)$

Remarque 74. La notation « $A = (F_g, x, F_d)$ » présente ci-dessus est à comprendre de la manière suivante : notons $F_g = (V_g, E_g)$, $F_d = (V_d, E_d)$, $x = (\{x\}, \emptyset)$. Notons x_g la racine de F_g et x_d la racine de F_d . Alors, $A = (V_g \sqcup V_d \sqcup \{x\}, E_g \sqcup E_d \sqcup \{(x, x_g), (x, x_d)\})$.

Exemple 75. La figure ci-dessous est un arbre binaire enraciné en 1.

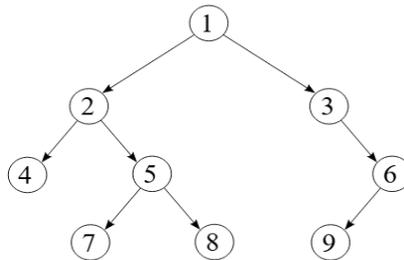


Figure 6. Exemple d'arbre binaire [10]

Théorème 76. Soit E un ensemble dénombrable de n sommets ($n \in \mathbb{N}$). Il y a C_n arbres binaires étiquetés sur E possédant $n \in \mathbb{N}$ sommets.

Preuve : Notons $(\mathcal{A}, | \cdot |)$ la classe combinatoire des arbres binaires étiquetés sur E muni de la norme qui à un arbre binaire associe son nombre de sommets (NB : un élément de \mathcal{A} ne voit pas l'étiquetage des sommets. Par exemple, les éléments à 3 sommets sont de cette forme :

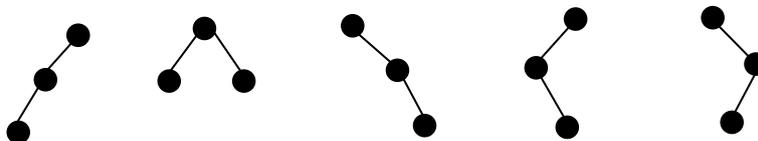


Figure 7. Les arbres binaires à trois sommets

et sont donc au nombre de 5). Notons cet ensemble \mathbf{E} . Il est clair que \mathcal{A} est une classe combinatoire. Notre définition des arbres binaires trouve directement une interprétation sous forme de classes combinatoires. En effet, par définition, en notant \mathcal{E} et \mathcal{R} les classes neutre et atomique associées :

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{E} + \mathcal{A} \times \mathcal{R} \times \mathcal{A}$$

Le raisonnement habituel sur les FGO nous permet directement de conclure : le nombre d'arbres binaires à n sommets est

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

■

Chapitre 3

Généralisations des nombres de Catalan

3.1 Généralisation analytique

Nous aimerions trouver un moyen naturel d'interpoler la fonction $\mathbb{N} \ni n \mapsto C_n$. Les nombres de Catalan s'expriment avec des factorielles, ce problème se réduit en grande partie à l'interpolation de la fonction $\mathbb{N} \ni n \mapsto n!$. C'est alors qu'intervient la fonction Γ d'Euler, introduite à la **Définition/Proposition 22** :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sachant sa propriété concernant les factorielles – que nous démontrerons au **Lemme 79** –, nous pouvons alors exprimer les nombres de Catalan à l'aide de Γ :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)}$$

Il s'agira donc de trouver un prolongement méromorphe de cette fonction Γ pour résoudre notre problème **[9]** : interpoler de façon méromorphe les nombres de Catalan.

Propriété 77. *La fonction réelle*

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs.

Preuve : D'une part, pour tout x réel, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. D'autre part,

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Donc, par critère de Riemann,

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t} dt < \infty \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Enfin, par croissance comparée

$$t^{x-1}e^{-t} = o_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Le critère de Riemann assure alors que pour tout x réel

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t} dt < \infty$$

Ainsi, $\Gamma(x)$ existe si, et seulement si, $x > 0$. ■

Théorème 78. La fonction Γ ainsi définie sur \mathbb{R}_+^* se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ par la formule :

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt$$

Preuve : Montrons d'abord que cette intégrale converge bien sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Prenons alors $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x > 0$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}|e^{(z-1)\ln t}| = e^{-t}e^{(x-1)\ln t} = e^{-t}t^{x-1}$$

Alors, par l'inégalité triangulaire et la **Propriété 77** :

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1} dt = \Gamma(x) < \infty$$

Montrons désormais que Γ ainsi définie est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Posons pour tout $\epsilon > 0$

$$\phi_\epsilon : z \mapsto \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t}e^{(z-1)\ln t} dt$$

Pour tout $t \in \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\right]$ qui est compact, $z \mapsto e^{-t} e^{(z-1) \ln t}$ est holomorphe. De plus, $(z, t) \mapsto e^{-t} e^{(z-1) \log t}$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \times \left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\right]$. Donc, par théorème, ϕ_ϵ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ pour tout $\epsilon > 0$.

Considérons alors la suite de fonctions $(\phi_{1/n})_{n \geq 1}$. Montrons que cette suite converge uniformément vers Γ sur toute bande $B_{\delta, M} = \{z \in \mathbb{C}, \delta < \operatorname{Re} z < M\}$ avec $0 < \delta < M < \infty$. Soit $n > 0$. Par relation de Chasles et inégalité triangulaire, avec $z = x + iy \in B_{\delta, M}$,

$$|\Gamma(z) - \phi_{1/n}(z)| \leq \int_0^{1/n} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Mais, comme $e^{-t} < 1$ sur $]0, \frac{1}{n}[$,

$$\int_0^{1/n} e^{-t} t^{x-1} dt \leq 1 \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} t^{x-1} dt = \left[\frac{1}{x} t^x\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{(1/n)^x}{x} \leq \frac{(1/n)^\delta}{\delta}$$

De plus,

$$\int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{M-1} dt = \int_n^\infty e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} t^{M-1} dt$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/2} t^{M-1} = 0$. Comme $n \geq 1$, La fonction $t \mapsto e^{-t/2} t^{M-1}$ étant continue sur $]n, \infty[$, elle est bornée par un certain $M^+ > 0$ sur cet intervalle.

Donc,

$$\int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq M \int_n^\infty e^{-t/2} dt$$

Alors,

$$|\Gamma(z) - \phi_{1/n}(z)| \leq \frac{(1/n)^\delta}{\delta} + M^+ \int_n^\infty e^{-t/2} dt$$

Donc,

$$\|\Gamma - \phi_{1/n}\|_\infty \leq \frac{(1/n)^\delta}{\delta} + M \int_n^\infty e^{-t/2} dt$$

Mais, comme $0 < \delta$ et $\int_0^\infty e^{-t/2} dt$ est une intégrale convergente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/n)^\delta}{\delta} + M \int_n^\infty e^{-t/2} dt = 0$$

On déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma - \phi_{1/n}\|_{\infty} = 0$. Donc, $(\phi_{1/n})_{n>0}$ converge uniformément vers Γ sur toute bande de la forme $B_{\delta, M} = \{z \in \mathbb{C}, \delta < \operatorname{Re} z < M\}$.

Mais, $(\phi_{1/n})_{n>0}$ est une suite de fonctions holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ comme nous l'avons démontré précédemment. Donc, si Δ est un triangle plein contenu dans l'ouvert, et $\delta\Delta$ sa frontière ; le théorème de Goursat assure que pour tout $n > 0$,

$$\int_{\delta\Delta} \phi_{1/n}(z) dz = 0$$

Comme $(\phi_{1/n})_{n>0}$ converge uniformément vers Γ sur toute bande $B_{\delta, M}$ contenant Δ , le théorème de la double limite assure que

$$\int_{\delta\Delta} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{1/n}(z) dz = 0$$

D'où

$$\int_{\delta\Delta} \Gamma(z) dz = 0$$

La fonction Γ est alors continue sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ et $\int_{\delta\Delta} \Gamma(z) dz = 0$ pour tout Δ triangle plein contenu dans l'ouvert. Le théorème de Morera nous permet de conclure que Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. ■

Lemme 79. Pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \text{ et } \Gamma(n + 1) = n!$$

Preuve : Par parties, pour $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$,

$$z\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot z t^{z-1} dt = [e^{-t} t^z]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = 0 + \Gamma(z + 1)$$

Ainsi, $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

Mais,

$$\Gamma(0 + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1$$

Par récurrence, la ligne précédente justifie l'initialisation. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\Gamma(n + 1) = n!$, alors par la propriété que l'on vient de démontrer, et par hypothèse de récurrence :

$$\Gamma(n + 2) = (n + 1)\Gamma(n + 1) = (n + 1)!$$

Ceci démontre l'hérédité de la récurrence.

On conclut alors : Pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \text{ et } \Gamma(n + 1) = n!$$

■

Théorème 80. La fonction Γ bénéficie d'un unique prolongement méromorphe sur \mathbb{C} tout entier, dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs ou nul, où elle a pour résidus ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Preuve : Nous proposerons deux preuves à ce théorème ; toutes deux très éclairantes.

Première preuve : L'idée est de prolonger Γ au demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -m\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Le cas $m = 0$ a déjà été traité. Observons donc dans un premier temps le cas $m = 1$. Posons

$$\varphi_1 : z \mapsto \frac{\Gamma(z + 1)}{z}$$

Le **Théorème 78** nous assure que $z \mapsto \Gamma(z + 1)$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$. Donc, φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan avec un unique pôle simple en $z = 0$. Le pôle étant simple, on déduit que

$$\operatorname{Res}(\varphi_1, 0) = \frac{\Gamma(0 + 1)}{1} = \frac{0!}{1} = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$$

De plus, dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$, le **Lemme 79** assure que

$$\varphi_1(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} = \Gamma(z)$$

Faisons maintenant le cas général pour $m \geq 1$. Posons

$$\varphi_m : z \mapsto \frac{\Gamma(z + m)}{z(z + 1) \cdots (z + m - 1)}$$

Le **Théorème 78** nous assure que $z \mapsto \Gamma(z + m)$ est holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -m\}$. Donc, φ_m est méromorphe dans ce demi-plan avec m pôles simples qui sont $\{0, -1, \dots, -(m - 1)\}$. Soit $n \in \llbracket 0, m + 1 \rrbracket$.

$$\operatorname{Res}(\varphi_m, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z + n) \varphi_m(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z + m)}{z(z + 1) \cdots (z + n - 1)(z + n + 1) \cdots (z + m - 1)}$$

D'où

$$\operatorname{Res}(\varphi_m, -n) = \frac{\Gamma(-n + m)}{-n(-n + 1) \cdots (-1)(1) \cdots (-n + m - 1)} = \frac{(m - n - 1)!}{(-1)^n n! (m - n - 1)!}$$

Finalement,

$$\operatorname{Res}(\varphi_m, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Mais en itérant l'identité du lemme précédent, on déduit (récurrence évidente) que

$$\Gamma(z + m) = (z + m - 1)\Gamma(z + m - 1) = \cdots = (z + m - 1)(z + m - 2) \cdots (z + 1)z\Gamma(z)$$

Ceci assure alors que dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -m\}$,

$$\varphi_m(z) = \Gamma(z)$$

Le principe du prolongement analytique assure que $\varphi_m = \varphi_n$ dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -n\} \setminus \mathbb{Z}_-$ si $1 \leq n \leq m$. On a ainsi trouvé un prolongement méromorphe de la fonction Γ sur \mathbb{C} tout entier, dont les seules singularités sont des pôles simples aux entiers négatifs ou nul. Le principe du prolongement analytique fournit que ce prolongement est unique.

Deuxième preuve : L'idée est de décomposer Γ en deux intégrales. Si $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Montrons d'abord que la deuxième intégrale définit une fonction entière. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\phi_n : z \mapsto \int_1^n e^{-t} e^{(z-1)\log t} dt$$

Posons également

$$f : z \mapsto \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Et en notant $z = x + iy$:

$$|f(z)| \leq \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \infty$$

car

$$t^{x-1} e^{-t} = o_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Et on conclut par critère de Riemann. Donc, f est définie sur \mathbb{C} tout entier.

Notons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Par relation de Chasles et inégalité triangulaire on obtient :

$$|f(z) - \phi_n(z)| = \left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

On peut alors faire la même preuve que celle du **Théorème 78** en se plaçant sur toute bande $B_{\delta, M}$ définie précédemment. On montre alors que $(\phi_n)_{n>0}$ converge uniformément vers $z \mapsto \int_1^\infty e^{-t} e^{(z-1)\log t} dt$ sur $B_{\delta, M}$.

Mais, pour tout $t \in [1, n]$ qui est compact, $z \mapsto e^{-t} e^{(z-1)\log t}$ est holomorphe. De plus, $(z, t) \mapsto e^{-t} e^{(z-1)\log t}$ est continue sur $\mathbb{C} \times [1, n]$. Donc, par théorème, ϕ_n est holomorphe sur \mathbb{C} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme pour le **Théorème 78** on montre alors par les théorèmes de Goursat et Morera que f est holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. Donc f est entière.

Ensuite, avec $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ fixé, en notant $z = x + iy$ et en développant l'exponentielle en série entière :

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt$$

Posons donc la suite de fonctions définies sur $]0,1]$ par

$$f_N: t \mapsto \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1}$$

Les fonctions éléments de la suite $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont continues donc boréliennes et convergent simplement vers

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1}$$

De plus, pour tout $t \in]0,1]$, $N \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire

$$|f_N(t)| \leq \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} t^{x-1} = t^{x-1} \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!} \leq t^{x-1} e^t \stackrel{\text{def}}{=} g(t)$$

La fonction g est continue sur $]0,1]$ et

$$t^{x-1} e^t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Donc, comme $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, $x > 0$ et $1 - x < 1$. Donc la fonction g est intégrable. Par théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_0^1 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt$$

Finalement,

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

On peut alors écrire

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Pour conclure la preuve, il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ définit bien une fonction méromorphe dans \mathbb{C} ayant pour singularités des pôles simples aux entiers négatifs ou nul. Le résidu indiqué dans l'énoncé du théorème se lit alors directement.

C'est bien le caractère infini de cette somme qui nous empêche de conclure directement. Ramenons-nous donc à une somme finie.

Soit alors $R > 1$ et $N > 2R$. L'idée est de décomposer la somme de la manière suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

La première somme définit bien une fonction méromorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ayant pour pôles les entiers négatifs ou nuls de valeur absolue plus petite que R . Les résidus sont alors bien ceux indiqués.

Montrons que la deuxième somme définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Cette somme traite des entiers $n > N > 2R$. Pour $|z| < R$, on a alors par inégalité triangulaire :

$$|n+z| \geq n - |z| \geq 2R - R = R$$

Donc,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} \right| \leq \frac{1}{n! R}$$

Comme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! R}$ est convergente, on déduit que la deuxième somme en question converge normalement, donc uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Donc, la fonction

$$z \mapsto \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Mais ceci est vrai pour tout R arbitrairement grand. On déduit donc que l'écriture

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est valable sur \mathbb{C} tout entier privé des entiers négatifs ou nul. À nouveau, le principe du prolongement analytique assure que c'est l'unique façon de prolonger Γ sur \mathbb{C} de manière méromorphe.

■

Remarque 81. Nous continuerons à noter Γ ce prolongement.

Lemme 82. Si $0 < a < 1$, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

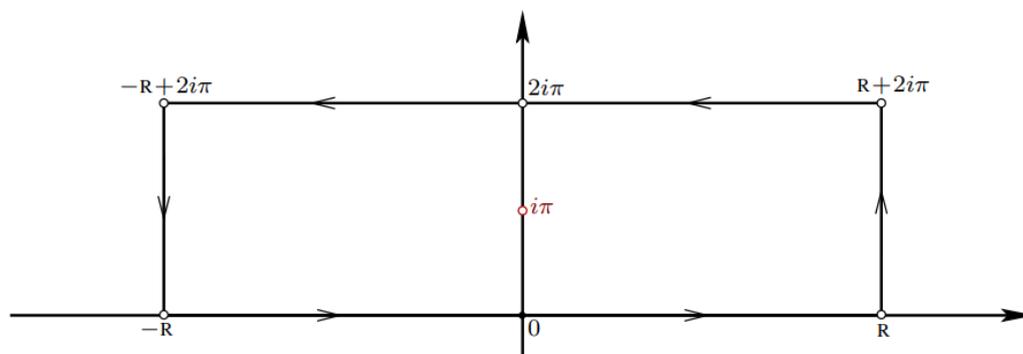
Preuve : Le changement de variable $v = e^x$ donne dans un premier temps :

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}$$

Posons la fonction complexe

$$f : z \mapsto \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

Les pôles de cette fonction sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = -1 \Leftrightarrow z = i\pi + 2ik\pi = i(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ce ne sont donc que des pôles simples. Soit $R > 0$, et introduisons le contour γ suivant :



Le seul pôle de f à l'intérieur de γ est $z = i\pi$. Mais,

$$\text{Res}(f, i\pi) = \lim_{t \rightarrow i\pi} (z - i\pi)f(z) = \frac{e^{ai\pi}}{(z \mapsto 1 + e^z)'(i\pi)} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}$$

Le théorème des résidus assure alors que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2i\pi e^{ai\pi}$$

Qui se décompose de la manière suivante, avec le contour considéré :

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(R + iy)idy - \int_{-R}^R f(x + 2i\pi)dx - \int_0^{2\pi} f(-R + iy)idy = -2i\pi e^{ai\pi} \quad (*)$$

Traisons d'abord la deuxième intégrale. Par inégalité triangulaire sur les complexes, on a :

$|e^{R+iy} + 1| \geq ||e^R| - |1|| \geq e^R - 1$. Par suite,

$$\left| \int_0^{2\pi} f(R + iy)idy \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} \right| dy \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \int_0^{2\pi} dy \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} 2\pi e^{(a-1)R} \underset{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

car $0 < a < 1$.

Le même calcul traite également la quatrième intégrale et on déduit alors que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(-R + iy)idy \right| \leq \frac{2\pi e^{-aR}}{e^{-R} - 1} \text{ et } \int_0^{2\pi} f(-R + iy)idy \underset{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

Enfin, pour la troisième intégrale :

$$- \int_{-R}^R f(x + 2i\pi)dx = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2i\pi)}}{1 + e^{x+2i\pi}} dx = -e^{2ai\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$$

Ainsi, quand $R \rightarrow \infty$, (*) implique :

$$(1 - e^{2ai\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2i\pi e^{ai\pi}$$

Finalement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

■

Théorème 83 (Formule des compléments). *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Preuve : Soit $0 < x < 1$ et $t > 0$. Le changement de variables $vt = u$ donne

$$\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-x} du = t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-x} dv$$

On obtient alors,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \Gamma(1-x) dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} t \int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{-x} dv dt$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty v^{-x} \int_0^\infty e^{-t(1+v)} dt dv = \int_0^\infty v^{-x} \left[\frac{e^{-t(1+v)}}{-1-v} \right]_0^\infty dv = \int_0^\infty \frac{v^{-x}}{1+v} dv$$

Finalement, par le Lemme 82 :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi(1-x)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Le principe du prolongement analytique assure alors que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

On remarque enfin que les pôles de $z \mapsto \Gamma(1-z)$ sont les entiers naturels non nuls, de sorte que $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $z \mapsto \frac{\pi}{\sin \pi z}$ ont exactement les mêmes pôles. On a donc bien pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

■

Propriété 84. On a l'identité suivante

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Preuve : En appliquant le **Théorème 83** en $z = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

D'où, par positivité de Γ sur \mathbb{R}_+^* ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

■

Théorème 85 (Formule de duplication). Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

Preuve : On rappelle la définition de la fonction bêta introduite à la **Définition/Proposition 22** : pour $a, b > 0$,

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \text{ et } B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Le changement de variables $t = \sin^2 \theta$ donne :

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta$$

D'où si $a = b$, par la formule de duplication du sinus et avec le changement de variables $\psi = 2\theta$

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^{2a-1} d\theta = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^{\pi} (\sin \psi)^{2a-1} d\psi = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \psi)^{2a-1} d\psi$$

En effet, le changement de variables $x = \pi - \psi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \psi)^{2a-1} d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\pi - \psi))^{2a-1} d\psi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{2a-1} dx$$

Mais,

$$\frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \psi)^{2a-1} d\psi = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(a, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(2a)} = B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

On déduit donc :

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2a}\sqrt{\pi} \Gamma(2a)$$

Cette égalité est donc vraie sur \mathbb{R}_+^* . Le principe du prolongement analytique assure alors que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

■

Théorème 86. La fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec pour seuls zéros les entiers négatifs ou nuls.

Preuve : La formule des compléments (Théorème 83) assure que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1 - z)$$

On déduit déjà que $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe sur $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ car par les observations précédentes, les pôles simples de $z \mapsto \Gamma(1 - z)$ sont les entiers naturels non nuls. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto (z - n)\Gamma(1 - z)$ est holomorphe en n . Mais n est un zéro d'ordre 1 de $z \mapsto \sin \pi z$ qui est holomorphe entière. Par le lemme de factorisation, on trouve donc g_n holomorphe telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sin \pi z = (z - n)g_n(z)$. Ainsi,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{g_n(z)}{\pi} (z - n)\Gamma(1 - z)$$

Par produit de fonctions holomorphes, on déduit que $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe en $n \in \mathbb{N}$. Donc, $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est holomorphe entière avec pour seuls zéros les entiers négatifs ou nuls (car ils annulent le sinus). ■

Après cette étude de la fonction Gamma, on peut enfin traiter notre problème principal ; celui de trouver le prolongement méromorphe naturel des nombres de Catalan.

Théorème 87. Les nombres de Catalan jouissent du prolongement méromorphe suivant, défini sur \mathbb{C} tout entier privé des $s_k = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$:

$$C : s \mapsto \frac{4^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(s + 2)}$$

De plus, en $s_k = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Res}(C, s_k) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $C(n) = C_n$. La forme explicite des nombres de Catalan donne :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)}$$

Par le **Lemme 79** on déduit que si n est non nul

$$C_n = \frac{2n\Gamma(2n)}{n\Gamma(n)\Gamma(n+2)} = \frac{2\Gamma(2n)}{\Gamma(n)\Gamma(n+2)}$$

Si $n = 0$, la **Propriété 84** donne directement que $C_0 = C(0)$.

Le **Théorème 85** nous permet ensuite d'écrire :

$$C_n = 2 \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2^{1-2n}\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n+2)} = \frac{4^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2)}$$

Qui est bien le résultat recherché.

Enfin, $s \mapsto \frac{1}{\Gamma(s+2)}$ est holomorphe entière par le **Théorème 86** et $s \mapsto \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)$ est méromorphe avec des pôles simples en $s_k = -k - \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ d'après le **Théorème 80**.

Ce même théorème assure également que $\text{Res}(C, s_k) = \frac{(-1)^k}{k!}$.

Ainsi, les nombres de Catalan jouissent du prolongement méromorphe suivant :

$$\boxed{C : s \mapsto \frac{4^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(s+2)}}$$

■

3.2 Généralisation combinatoire

Il s'agira dans cette sous-partie d'étudier les nombres de Fuss-Catalan. Ces suites s'éloignent clairement du sujet principal de notre étude, c'est pourquoi nous n'en donnerons qu'une très brève introduction. Nous nous inspirerons grandement de [7], [8] et aussi de [15].

Lemme 88 (Lemme de Raney). Soit $m > 0$ et x_1, \dots, x_m des entiers tels que

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Alors, parmi les permutations circulaires

$$(x_1, x_2, \dots, x_m), (x_2, x_3, \dots, x_m, x_1), \dots, (x_m, x_1, \dots, x_{m-1})$$

il en existe une et une seule dont toutes les sommes partielles sont strictement positives.

Preuve : Soient x_1, \dots, x_m de tels entiers. Répétons indéfiniment cette suite d'entiers. En d'autres termes, considérons $(x_i)_{i>0}$ la suite telle que $x_{m+k} = x_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Introduisons la suite $(s_n)_{n>0}$ telle que pour tout $n > 0$,

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

Comme

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

on déduit que pour tout $n > 0$, $s_{m+n} = 1 + s_n$. Alors, en interpolant par des droites affines le graphe de $(s_n)_{n>0}$, on déduit que le graphe ainsi obtenu peut-être contenu entre deux droites de pente $\frac{1}{m}$. On note D_+ la droite qui est au-dessus du graphe, et D_- la droite qui est en-dessous du graphe. On choisit bien sûr les deux droites qui encadrent le plus précisément le graphe, c'est-à-dire les droites qui ont une intersection non vide avec le graphe. Cette intersection est alors nécessairement réduite à un seul et unique point sur tout intervalle $\llbracket p, p + m - 1 \rrbracket$ où $p \in \mathbb{N}^*$, car toute droite de pente $\frac{1}{m}$ ne peut toucher un point à coordonnées entières qu'une fois toutes les m unités. En effet, soit $f : x \mapsto \frac{1}{m}x + \mu$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. Supposons qu'on trouve a, b, n, k des entiers tels que $f(a) = b, f(n) = k$ et $1 \leq a \leq m, 1 \leq n \leq m$. Alors,

$$b - k = \frac{a - n}{m}$$

Mais $-m \leq -n \leq -1$ donc $-m < a - n < m$. D'où $-1 < b - k < 1$.

Comme b, k sont entiers, $b - k$ est aussi entier. Donc, $b = k$; et $a = n$.

Considérons donc $\mathfrak{L}(l, s_l)$ l'unique point d'intersection entre le graphe de $(s_n)_{1 \leq n \leq m}$ et D_- . Alors, la suite $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+m}$ satisfait notre conclusion car les sommes partielles de cette suite sont, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\sum_{n=l+1}^{l+k} x_n = s_{l+k} - s_l > 0.$$

L'unicité résulte du fait que pour toute autre suite $u^{(r)} : x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{r+m}$ avec $0 \leq r < m$ et $r \neq l$, il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que,

- si $r < l$ alors $s_{r+i} = s_l$; et donc une des sommes partielles de $u^{(r)}$ est

$$\sum_{n=r+1}^{r+i} x_n = s_l - s_r < 0.$$

- si $r > l$ alors $s_{r+i} = s_{m+l} = s_l + 1$; et donc une des sommes partielles de $u^{(r)}$ est

$$\sum_{n=r+1}^{r+i} x_n = s_l + 1 - s_r \leq 0.$$

Ceci prouve alors le lemme de Raney. ■

Exemple 89. Considérons les entiers $(3, -5, 2, -2, 3, 0)$. Leur somme est bien égale à 1. Les permutations circulaires associées sont

$(3, -5, 2, -2, 3, 0)$	$(-2, 3, 0, 3, -5, 2)$
$(-5, 2, -2, 3, 0, 3)$	$(3, 0, 3, -5, 2, -2)$
$(2, -2, 3, 0, 3, -5)$	$(0, 3, -5, 2, -2, 3)$

et la seule n'ayant que des sommes partielles strictement positives est $(3, 0, 3, -5, 2, -2)$.

À ces entiers nous pouvons associer la suite $(3, -5, 2, -2, 3, 0, 3, -5, 2, -2, 3, 0, 3, -5, \dots)$, et tracer le graphe des sommes partielles avec l'encadrement par deux droites ainsi expliqué dans la preuve.

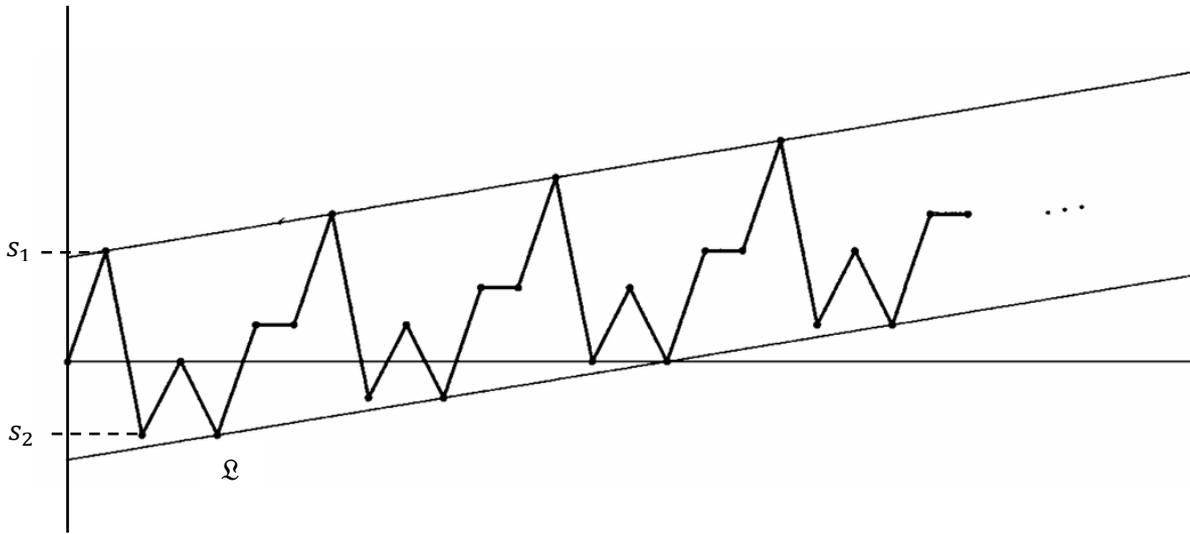


Figure 8. Graphe des sommes partielles encadré par deux droites de pente égale à $\frac{1}{6}$ [7]

Remarque 90. Le lemme de Raney permet alors de dénombrer aisément les chemins de Dyck ; calcul déjà effectué au chapitre précédent. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous voulons dénombrer les suites (a_1, \dots, a_{2n}) tels que $a_i = \pm 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $\sum_{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket} a_i = 0$, et toutes les sommes partielles sont positives ou nulles. Cette question est parfaitement équivalente à vouloir dénombrer les suites (a_0, \dots, a_{2n}) tels que $a_i = \pm 1$ pour tout $i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\sum_{i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket} a_i = 1$, et toutes les sommes partielles sont strictement positives. Par définition du coefficient binomial, il existe

$$N = \binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n}$$

suites de taille $2n+1$ contenant n occurrences de -1 et $n+1$ occurrences de $+1$. Mais le lemme de Raney assure alors qu'il existe une unique suite sur $2n+1$ dont toutes les sommes partielles sont strictement positives. Ainsi, le nombre de chemins de Dyck de taille $2n$ est :

$$\frac{N}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$$

Définition/Propriété 91. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. On appelle **suite de Raney d'ordre m de taille n** une suite (a_1, \dots, a_{nm}) de $+1$ et de $(1-m)$ dont les sommes partielles sont toutes positives ou nulles et dont la somme totale vaut 0 . De manière équivalente, une suite de Raney d'ordre m de taille n est également une suite (a_0, \dots, a_{nm}) de $+1$ et de $(1-m)$ dont les sommes partielles sont toutes strictement positives et dont la somme totale vaut 1 . Le nombre de suite de Raney d'ordre m de taille n est

$$C_n^{(m)} = \binom{mn}{n} \frac{1}{(m-1)n+1}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, la suite $(C_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée une **suite de nombres de Fuss-Catalan**.

Dans [15] $C_n^{(m)}$ est noté $C_{n,m-1}$.

Preuve : Soit (a_0, \dots, a_{nm}) une telle suite. S'il y a k occurrences de $(1 - m)$ alors la suite doit vérifier :

$$k(1 - m) + nm + 1 - k = 1 \Leftrightarrow -km + nm = 0 \Leftrightarrow k = n$$

Par définition du coefficient binomial, il existe $\binom{mn+1}{mn+1-n} = \binom{mn+1}{n}$ suites contenant $mn + 1 - n$ occurrences de $+1$ et n occurrences de $(1 - m)$. Le lemme de Raney nous assure alors que le nombre de telles suites ayant toutes leurs sommes partielles strictement positives est égal à

$$\binom{mn+1}{n} \frac{1}{mn+1} = \binom{mn}{n} \frac{1}{(m-1)n+1}$$

■

Remarque 92. *Il est alors clair que les nombres de Fuss-Catalan sont une extension combinatoire des nombres de Catalan ordinaires car*

$$C_n = C_n^{(2)}$$

Les trois théorèmes suivants éclairent l'idée que les nombres de Fuss-Catalan sont une extension des nombres de Catalan ordinaires. Nous les donnons néanmoins sans preuves – nous nous attarderions sur des détails qui s'éloignent trop du thème principal – et invitons le lecteur à parcourir les ouvrages [7] et [15] pour plus d'informations.

Théorème 93 (Récurrence convolutionnelle des nombres de Fuss-Catalan). *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a la relation de récurrence suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$C_n^{(m)} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n-1} C_{n_1}^{(m)} C_{n_2}^{(m)} \dots C_{n_m}^{(m)}$$

Théorème 94 (FGO des nombres de Fuss-Catalan). *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction génératrice ordinaire de la classe combinatoire ayant pour suite d'énumération $\left(C_n^{(m)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est*

$$G(z) = 1 + zG(z)^m$$

Théorème 95. *Le nombre de façons de partager un $((m-1)n+2)$ -gone convexe en $(m+1)$ -gone au moyen de diagonales est le nombre de Fuss-Catalan $C_n^{(m)}$.*

Pour ce dernier résultat, on pourra lire la partie A14 page 108 de [15].

Les nombres de Fuss-Catalan forment un ensemble d'une très grande richesse et constituent un champ d'étude à part entière. Nous pourrions y trouver la matière d'un nouveau développement, mais le nôtre est terminé.

Bibliographie

- [1] AMMAR, ABOUD: Nombres de Catalan généralisés et interprétation combinatoire : *Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene, Mémoire de Magister, 2010*
- [2] BECIRSPAHIC, JEAN-PIERRE: Graphes : *Cours de MP* de Louis-le-Grand en option informatique*
- [3] BECIRSPAHIC, JEAN-PIERRE: Arbres binaires : *Cours de MP* de Louis-le-Grand en option informatique*
- [4] CHIHARA, THEODORE S. : An introduction to orthogonal polynomials : *Math. Appl., Vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978, xii+249 pp. ISBN: 0-677-04150-0*
- [5] ECOLES CENTRALES : Mathématiques 1 : *filière PC du concours Centrale-Supélec, 2021*
- [6] FLAJOLET, PHILIPPE ; SEDGEWICK, ROBERT: Analytic Combinatorics : *Cambridge University Press, Cambridge, 2009, xiv+810 pp. ISBN: 978-0-521-89806-5*
- [7] GRAHAM, RONALD L. ; KNUTH, DONALD E. ; PATASHNIK, OREN: Concrete Mathematics : *Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994, xiv+657 pp. ISBN: 0-201-55802-5*
- [8] JEURISSEN, R. H. : Raney and Catalan : *Discrete Math. 308 (2008), no. 24, 6298–6307*
- [9] DE MARÇAY, FRANÇOIS: Analyse Complexe : *Cours de L3 de l'Université Paris-Saclay*
- [10] MASTERMATT : Arbre binaire ordonné : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arbre_binaire_ordonne.svg, 2008
- [11] POUZET, MAURICE : Mots, Langages, Automates : *Manuscrit*
- [12] QI, FENG ; GUO BI-NI : Integral Representations of the Catalan Numbers and Their Applications : *MDPI AG in Mathematics, Vol. 5 (3), 40 https://doi.org/10.3390/math5030040*
- [13] RIORDAN, JOHN : A note on Catalan parentheses : *Amer. Math. Monthly 80 (1973), 904–906.*
- [14] SAINT-CRIQ, ANTHONY: Nombres de Catalan : *Université Paul Sabatier Toulouse III, Mémoire encadré de L3 par Vadim Scheschtman, 2018*
- [15] STANLEY, RICHARD P.: Catalan Numbers : *Cambridge University Press, New York, 2015, viii+215 pp. ISBN: 978-1-107-42774-7; 978-1-107-07509-2*
- [16] SZEGÖ, GABOR : Orthogonal Polynomials : *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23 American Mathematical Society, New York, 1939, ix+401 pp.*
- [17] VILLARINO, MARK B. : On the Convergence of the Catalan Generating Function : *10.48550/arXiv.1511.08555, 2015*