

Rapport de projet :

Fractions continues,
groupe modulaire
et généralisations

Aziz ALYACOUB

Juin 2026

Table des matières

1	Définition des fractions continues finies et infinies et propriétés	2
2	Fractions continues généralisées, groupe modulaire	9
2.1	Fractions continues généralisées	9
2.2	Groupe modulaire	11
	Références	14

Abstract

Ce document est consacré à l'étude des fractions continues et de certaines de leurs généralisations.

La première partie se veut une introduction aux fractions continues simples. Après avoir présenté leurs définitions dans les cas fini et infini, on établit plusieurs propriétés fondamentales : les relations de récurrence des réduites, leur monotonie, leur convergence, ainsi que l'existence et l'unicité du développement en fraction continue des nombres irrationnels. Cette partie offre un aperçu des principaux résultats classiques sur les fractions continues.

La seconde partie s'intéresse à une famille de fractions continues généralisées dépendant d'un paramètre entier m . Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un problème portant sur les classes d'équivalence d'une relation définie sur $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ à l'aide de transformations élémentaires. On montre notamment que tout nombre rationnel admet un développement en fraction continue généralisée d'ordre 2 ou 3, tandis que le cas d'ordre 4 met en évidence une obstruction caractérisée par la valuation 2-adique du dénominateur.

Enfin, cette relation d'équivalence est interprétée comme la relation d'appartenance à une même orbite sous l'action du groupe modulaire dans le cas classique, puis d'une famille de sous-groupes de $PSL_2(\mathbb{R})$ dans le cas général. Cette interprétation met en évidence les liens entre fractions continues, transformations homographiques et actions de groupes.

1 Définition des fractions continues finies et infinies et propriétés

Définition 1 (Fraction continue simple finie). Une fraction continue simple finie est une expression de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$. On note cette expression :

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Ces deux exemples illustrent la correspondance entre la notation compacte $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ et son écriture développée en fractions imbriquées :

$$\frac{43}{19} = [2; 3, 1, 4] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

$$\frac{7}{10} = [0; 1, 2, 2, 1] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}$$

Proposition 1 (Fractions continues des nombres rationnels). Soit $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$.

Alors il existe un entier $n \geq 1$ et des entiers $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$b = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Autrement dit, tout nombre rationnel positif admet un développement en fraction continue fini.

Démonstration. On applique la division euclidienne successivement.

On écrit

$$p = a_1q + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q,$$

puis, si $r_1 \neq 0$,

$$q = a_2r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1,$$

et ainsi de suite :

$$r_{k-2} = a_k r_{k-1} + r_k.$$

On obtient une suite strictement décroissante d'entiers positifs :

$$q > r_1 > r_2 > \dots \geq 0.$$

Une telle suite ne peut être infinie, donc il existe n tel que $r_n = 0$.

En remontant les égalités, on obtient alors

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Cela montre que tout rationnel positif possède un développement en fraction continue fini. $\square$

Remarque. L'écriture d'un rationnel en fraction continue finie n'est pas toujours unique si l'on autorise le dernier terme à être égal à 1.

En effet, on a par exemple

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1],$$

dès que $a_n \geq 2$.

Afin d'assurer l'unicité de l'écriture, on impose donc la condition

$$a_n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et, si nécessaire, } a_n \geq 2 \text{ pour éviter cette ambiguïté.}$$

Exemple 1. On a

$$[1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

mais aussi

$$[1; 1, 1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$[1; 2] = [1; 1, 1].$$

Cette proposition montre que les nombres rationnels s'obtiennent naturellement comme des fractions issues d'un processus de divisions successives.

Pour étudier plus finement cette construction et, surtout, pour l'étendre aux nombres irrationnels, il est utile de considérer les approximations successives qui apparaissent au cours du calcul.

C'est l'objet de la notion de réduite, que nous introduisons maintenant.

Définition 2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers telle que

$$a_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_n \in \mathbb{N}^* \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle n -ième réduite la fraction continue finie

$$[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Si la suite des réduites

$$([a_0], [a_0, a_1], [a_0, a_1, a_2], \dots)$$

converge vers un réel x , on définit la *fraction continue infinie* associée à la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n] = x.$$

Remarque. Contrairement aux fractions continues finies, l'écriture

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}$$

ne possède pas de signification intrinsèque. Elle est une notation abrégée pour la limite de la suite des réduites, lorsque cette limite existe.

La question de l'existence de cette limite n'est donc pas immédiate et fera l'objet d'un théorème de convergence démontré ultérieurement.

Afin d'étudier plus finement ces objets, on introduit les réduites associées, qui permettent d'approcher une fraction continue par des fractions rationnelles classiques.

Définition 3. Pour tout entier $n \geq 0$, on note

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

où p_n et q_n sont premiers entre eux et $q_n > 0$.

Les suites (p_n) et (q_n) sont appelées respectivement la suite des numérateurs et la suite des dénominateurs des réduites.

Les réduites vérifient une relation de récurrence simple, qui permet de les calculer efficacement sans réévaluer entièrement la fraction continue.

Proposition 2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que

$$a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \in \mathbb{N}^* \quad (n \geq 1).$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on note

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

où p_n et q_n sont premiers entre eux et $q_n > 0$.

Alors les suites (p_n) et (q_n) vérifient les relations de récurrence

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases} \quad (n \geq 1),$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1, & p_0 &= a_0, \\ q_{-1} &= 0, & q_0 &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Les conditions initiales proviennent des deux premières réduites :

$$[a_0] = \frac{a_0}{1},$$

et

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Supposons la relation vraie jusqu'au rang $n - 1$.

Par définition,

$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}].$$

En remplaçant a_{n-1} par

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n-1} a_n + 1}{a_n},$$

dans l'expression de la réduite précédente et en simplifiant, on obtient

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

ce qui démontre les relations annoncées. □

Nous allons maintenant établir une identité fondamentale reliant les numérateurs et dénominateurs successifs des réduites.

Théorème 1. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Démonstration. On procède par récurrence.

Pour $n = 0$,

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1,$$

ce qui est bien égal à $(-1)^{-1}$.

Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$.

En utilisant les relations de récurrence,

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence donne alors

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1},$$

ce qui conclut la preuve. □

Cette identité permet de déterminer précisément la différence entre deux réduites successives.

Corollaire 1. Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}},$$

puis d'utiliser le théorème précédent. □

On en déduit immédiatement un comportement monotone du dénominateur des réduites.

Proposition 3. *La suite $(q_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir du rang 1. Plus précisément,*

$$q_n > q_{n-1} > 0, \quad n \geq 1.$$

Démonstration. On procède par récurrence.

Comme

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1 \geq 1,$$

on a bien $q_1 \geq q_0$.

Supposons que

$$q_{n-1} > q_{n-2} > 0.$$

Les relations de récurrence donnent

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Or $a_n \geq 1$, d'où

$$q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 2$. □

Proposition 4. *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} > \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$$

et

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

Autrement dit, la suite des réduites d'indice pair est croissante tandis que la suite des réduites d'indice impair est décroissante.

Démonstration. Le corollaire donne

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Comme $q_n q_{n-1} > 0$, on obtient

- si n est impair,

$$\frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

- si n est pair,

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

En appliquant successivement ces inégalités, on conclut que les réduites paires forment une suite croissante tandis que les réduites impaires forment une suite décroissante. □

On admet le théorème suivant, la preuve consiste essentiellement à utiliser le signe des différences entre réduites successives :

Théorème 2. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} < \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

En particulier,

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} \quad \forall m, n.$$

Nous pouvons maintenant exploiter ces propriétés de monotonie pour établir la convergence de la suite des réduites.

Théorème 3. *La suite des réduites*

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geq 0}$$

est convergente.

Démonstration. La suite

$$\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$$

est croissante.

D'après le théorème précédent, elle est majorée par toute réduite impaire, donc elle converge.

De même,

$$\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$$

est décroissante et minorée par toute réduite paire. Elle converge également.

Notons

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Il reste à montrer que ces deux limites coïncident.

Or, d'après le corollaire

$$\left| \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right| = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}.$$

Comme la suite (q_n) est strictement croissante, on a

$$q_n \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \longrightarrow 0.$$

En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$|\ell_2 - \ell_1| = 0,$$

c'est-à-dire

$$\ell_1 = \ell_2.$$

Les deux sous-suites convergent donc vers une même limite, ce qui montre que la suite complète

$$\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$$

est convergente. □

Théorème 4 (Développement des irrationnels). *Tout nombre réel irrationnel $x > 0$ admet un développement en fraction continue infini*

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots],$$

où $a_1 \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \geq 2$.

De plus, ce développement est unique.

Démonstration. On construit les coefficients par l'algorithme classique :

$$a_1 = \lfloor x \rfloor, \quad x_1 = \frac{1}{x - a_1},$$

puis, pour $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \lfloor x_n \rfloor, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_{n+1}}.$$

Comme x est irrationnel, aucun reste $x_n - a_{n+1}$ n'est nul, donc le procédé ne s'arrête jamais, et on obtient une suite infinie (a_n) .

Notons $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \dots, a_n]$ les réduites associées.

On remarque que, par construction, on a

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1}.$$

De même,

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

et en remontant les relations, on obtient pour tout n :

$$x = [a_1, \dots, a_n, x_n].$$

Ainsi, la différence entre x et la réduite p_n/q_n est contrôlée par le terme restant x_n .

Or, on a

$$x = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}},$$

d'où

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(q_n x_n + q_{n-1})}.$$

Comme $q_n \rightarrow +\infty$ et $x_n > 0$, ce terme tend vers 0.

Donc

$$\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow x.$$

La convergence des réduites déjà établie implique alors que leur limite est nécessairement x , ce qui donne

$$x = [a_1, a_2, a_3, \dots].$$

L'unicité se démontre par récurrence en utilisant le fait que la partie entière est unique à chaque étape. $\square$

Exemple 2. On a

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

Exemple 3. Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie

$$\varphi = [1; 1, 1, 1, \dots].$$

2 Fractions continues généralisées, groupe modulaire

2.1 Fractions continues généralisées

On introduit maintenant une variante des fractions continues classiques, en modifiant légèrement les opérations élémentaires utilisées dans leur construction.

Définition 4 (Fraction continue généralisée finie). Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Une fraction continue généralisée finie d'ordre m est une expression de la forme

$$a_0 + \frac{1}{ma_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{m_na_n}}}}$$

où $m_n = m$ si n est impair et 1 sinon, $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^*$. Donc on alterne et on met un m une fois sur deux. On note cette expression :

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_m.$$

Remarque. On voit que $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_m = [a_0; ma_1, a_2, \dots, m_na_n]$.

Nous illustrons cette définition sur quelques exemples simples :

$$\frac{7}{24} = [0; 1, 2, 1]_3 = 0 + \frac{1}{3 \cdot 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 \cdot 1}}}$$

$$\frac{-2}{3} = [-1; 1, 1]_2 = -1 + \frac{1}{2 \cdot 1 + \frac{1}{1}}$$

Comme dans le cas classique, on cherche à savoir si toute fraction rationnelle admet une écriture de ce type. Une question se pose naturellement, pour $m \in \mathbb{N}^*$ est-ce que tout rationnel s'écrit comme une fraction généralisée d'ordre m ?

Pour $m = 1$ on a déjà répondu à la question dans la première partie. Il se trouve que c'est également vrai pour $m = 2$ et $m = 3$, on va le montrer en passant par une relation d'équivalence dépendant de m .

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $t : x \mapsto x + 1$ et $s_m : x \mapsto \frac{-1}{mx}$ (le choix de mettre un moins pour s_n sera justifié dans la toute dernière remarque) et leurs inverses définies sur $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ sur lui-même avec les conventions usuelles :

$$\infty \pm 1 = 1 \pm \infty = \infty \quad \frac{1}{\infty} = 0 \quad \frac{1}{0} = \infty$$

Définition 5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation $\sim_m$ sur $\mathbb{Q}_\infty$ de la manière suivante :

pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_\infty$, on dit que $x \sim_m y$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et des applications $h_1, \dots, h_k \in \{t, t^{-1}, s_m\}$ tels que

$$x = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_k(y).$$

Cela revient à "relier" deux éléments de $\mathbb{Q}_\infty$ par une chaîne finie d'applications dans $\{t, t^{-1}, s_m\}$. On vérifie aisément que $\sim_m$ est bien une relation d'équivalence.

Exemples :

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\infty \sim_m 0$. En effet, on a $\infty = s_m(0)$.

On a $\frac{4}{9} \xrightarrow{s_5} \frac{-9}{20} \xrightarrow{t^2} \frac{31}{20} \xrightarrow{s_5} \frac{-20}{155}$. Ainsi, $\frac{4}{9} \sim_5 \frac{-20}{155}$

Nous pouvons maintenant reformuler le problème en termes de cette relation d'équivalence.

Pour répondre à la question il est équivalent de prouver qu'il n'y a qu'une classe d'équivalence pour $\sim_m$ (celle de 0).

En effet, pour $x \in \mathbb{Q}$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_m &\iff x = (t^{a_0} \circ s_m) \circ \dots \circ (t^{(-1)^{n-1}a_{n-1}} \circ s_m) \circ t^{(-1)^n a_n}(0) \\ &\iff x \text{ est dans la classe de } 0. \end{aligned}$$

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 5. *Tout rationnel admet une écriture en fraction continue généralisée finie d'ordre 2 et 3. Les seuls rationnels admettant une écriture en fraction continue généralisée finie d'ordre 4 sont les fractions irréductibles dont le dénominateur est de valuation 2-adique différente de 1.*

Démonstration. Preuve pour m=2 :

Soit $x_0 = \frac{a_0}{b_0} \in \mathbb{Q}^*$. On va montrer que $x \sim_2 0$ ce qui permettra de conclure par ce qui a été dit avant. Pour cela on va construire un algorithme qui va nous permettre de réduire la valeur absolue du dénominateur.

La première étape consiste à trouver $x_1 \sim_2 x_0$ tel que $x_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il suffit pour cela de prendre $x_1 = x_0 - m = t^{-m}(x_0)$ où $m = \lfloor x_0 + \frac{1}{2} \rfloor$.

Ensuite il y a deux cas :

-Cas 1 : Soit $x_1 = 0$ ou $x_1 = \frac{-1}{2} \xrightarrow{s_2} 1 \xrightarrow{t^{-1}} 0$ et dans les deux cas on a le résultat souhaité.

-Cas 2 : Soit $x_1 = \frac{a_1}{b_1} \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus \{0\}$. On a donc $0 < |2a_1| < |b_1|$. Sans perte de généralité on suppose $x_1 > 0$ (l'autre cas se traite de manière similaire). On a donc $0 < 2a_1 < b_1$ d'où $0 < b_1 - 2a_1$ ce qui justifie que les opérations suivantes donnent des nombres rationnels non nuls :

$$\frac{a_1}{b_1} \xrightarrow{s_2} \frac{-b_1}{2a_1} \xrightarrow{t} \frac{2a_1 - b_1}{2a_1} \xrightarrow{s_2} \frac{a_1}{b_1 - 2a_1}.$$

On ramène cette dernière fraction dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de la même manière qu'au début et on arrive à $x_1 \sim_2 x_2 = \frac{a_2}{b_2}$ avec $b_2 = b_1 - 2a_1$ (car on ne change pas le dénominateur en appliquant t et t^{-1}), comme $0 < 2a_1 < b_1$ il vient $-b_1 < b_1 - 2a_1 < b_1$ et on a donc $|b_2| = |b_1 - 2a_1| < |b_1|$.

On répète ensuite ce procédé tant qu'on est dans le deuxième cas. On finira nécessairement à un moment dans le premier cas sinon $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait une suite d'entiers naturels strictement décroissante ce qui est absurde.

Ainsi on a $x_0 \sim_2 0$ et il n'y a donc qu'une classe d'équivalence.

Preuve pour m=3 :

La première étape est identique. Le premier cas de la deuxième étape est légèrement différent, on a $x_1 = 0$ ou $x_1 = \frac{-1}{2} \xrightarrow{s_3} \frac{2}{3} \xrightarrow{t^{-1}} \frac{-1}{3} \xrightarrow{s_3} 1 \xrightarrow{t^{-1}} 0$ et dans les deux cas on a le résultat souhaité.

Sinon on est dans le deuxième cas (on suppose encore $x_1 > 0$) et on a l'enchaînement suivant :

$$\frac{a_1}{b_1} \xrightarrow{s_3} \frac{-b_1}{3a_1} \xrightarrow{t} \frac{3a_1 - b_1}{3a_1} \xrightarrow{s_3} \frac{a_1}{b_1 - 3a_1}.$$

On ramène encore une fois cette dernière fraction dans $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ et on arrive à $x_1 \sim_3 x_2 = \frac{a_2}{b_2}$ avec $b_2 = b_1 - 3a_1$. Or on a encore $0 < 2a_1 < b_1$ d'où $-b_1 < -a_1 < b_1 - 3a_1 < b_1$ ainsi $|b_2| = |b_1 - 3a_1| < |b_1|$.

On conclut la preuve de la même manière que le cas n=2.

Preuve pour m=4 :

En refaisant le même raisonnement, on voit qu'on est soit dans la classe de 0 soit dans la classe de $\frac{-1}{2}$ et on peut donc dire qu'il y'a au plus 2 classes pour $n = 4$. Montrons que ces deux classes sont disjointes, pour cela on définit la proposition P suivante :

On dit que $x \in \mathbb{Q}$ vérifie P si sa réduction en fraction irréductible $\frac{a}{b}$ vérifie $v_2(b) = 1$.

Montrons que si x vérifie P alors tout élément qui lui est équivalent vérifie aussi P . Il suffit pour cela de montrer que $t(x)$, $t^{-1}(x)$ et $s_4(x)$ vérifie aussi P . Si $\frac{a}{b}$ est la fraction irréductible associée à x alors $t(x) = \frac{a+b}{b}$, or a est nécessairement impair (car b est pair par P et $a \wedge b = 1$) ainsi $a + b$ est impair et on a aussi $(a + b) \wedge b = 1$ donc $\frac{a+b}{b}$ est la fraction irréductible associée à $t(x)$ et $v_2(b) = 1$ donc $t(x)$ vérifie P . Le même raisonnement montre que $t^{-1}(x)$ vérifie aussi P . Enfin, $v_2(b) = 1$ donc il existe $b' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2b'$ avec $2 \nmid b'$ et $a \wedge b' = 1$ d'où $2a \wedge b' = 1$, ainsi $s_4(x) = \frac{-b}{4a} = \frac{-b'}{2a}$ et $\frac{-b'}{2a}$ est la fraction irréductible de $s_4(x)$ avec $v_2(2a) = 1$ car a est impair, donc $s(x)$ vérifie P .

On peut donc dire que les deux classes sont disjointes car 0 ne vérifie pas P donc ne peut pas être équivalent à $\frac{-1}{2}$. De plus, par ce qu'on a montré précédemment, les éléments dans la classe d'équivalence de 0 (donc ceux admettant une écriture en fraction continue généralisée finie d'ordre 4 par ce qui a été dit précédemment) ne vérifient pas P ce qui prouve cette partie du théorème. $\square$

2.2 Groupe modulaire

Définition 6. On appelle *groupe spécial linéaire projectif* sur $\mathbb{R}$, noté $PSL_2(\mathbb{R})$, le quotient du groupe spécial linéaire

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

par son centre

$$\{\pm I_2\},$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2. Ainsi,

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I_2\}.$$

Dans cette section on va interpréter les classes d'équivalence précédentes comme les orbites de l'action d'un certain sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{Q}_\infty$ que l'on identifie à $P^1(\mathbb{Q})$. Pour $m=1$ on peut même le voir par l'action du groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$ caractérisé comme suit (on admet la proposition) :

Proposition 5. *Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ est engendré par les classes des matrices*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, en notant encore S et T leurs classes dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, on a

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle.$$

On identifie désormais les transformations s_1 et t aux classes des matrices S et T dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, via l'action homographique sur $P^1(\mathbb{Q})$.

Plus précisément, on associe à

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{la transformation} \quad t(x) = x + 1,$$

et à

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{la transformation} \quad s_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

Ainsi, via l'identification de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ avec $\mathbb{Q}_\infty$, tout élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ agit sur $P^1(\mathbb{Q})$ par multiplication à gauche : si $M \in PSL_2(\mathbb{Z})$ et $x \in P^1(\mathbb{Q})$, on définit

$$M \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{où } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dans ce cadre, les opérations s_1 et t engendrent l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $P^1(\mathbb{Q})$, et les suites de transformations utilisées précédemment correspondent exactement à des produits de matrices dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ agissant sur x .

Par conséquent, la relation d'équivalence $\sim_1$ introduite précédemment coïncide avec la relation d'appartenance à une même orbite pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $P^1(\mathbb{Q})$.

Or, l'algorithme de réduction montre que tout élément de $P^1(\mathbb{Q})$ est $\sim_1$ -équivalent à 0. Ainsi, toute orbite contient 0.

On en déduit que l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $P^1(\mathbb{Q})$ est transitive, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule orbite :

$$P^1(\mathbb{Q}) = PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \{0\}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in P^1(\mathbb{Q})$, il existe $M \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que

$$x = M \cdot 0.$$

On peut généraliser la construction précédente au cas $m > 1$ en remplaçant le groupe $PSL_2(\mathbb{Z})$ par un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ engendré par deux transformations homographiques adaptées.

On introduit la matrice

$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}),$$

dont la classe dans $PSL_2(\mathbb{R})$ définit la transformation

$$s_m(x) = -\frac{1}{mx}.$$

On conserve également la transformation

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{correspondant à } t(x) = x + 1.$$

On considère alors le sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$ engendré par les classes de T et S_m , que l'on note

$$\Gamma_m = \langle T, S_m \rangle \subset PSL_2(\mathbb{R}).$$

Comme dans le cas $m = 1$, ce groupe agit sur $P^1(\mathbb{Q})$ par transformation homographique, et les opérations utilisées dans l'algorithme généralisé pour la fraction continue de paramètre m correspondent à des produits d'éléments de Γ_m .

Ainsi, la relation d'équivalence $\sim_m$ peut être interprétée comme la relation d'appartenance à une même orbite sous l'action de Γ_m sur $P^1(\mathbb{Q})$. On peut désormais réinterpréter les résultats obtenus précédemment en termes d'orbites.

Pour $m = 2$ et $m = 3$, il a été montré que toute classe d'équivalence est celle de 0. Par conséquent, l'action du sous-groupe $\Gamma_m \subset PSL_2(\mathbb{R})$ sur $P^1(\mathbb{Q})$ est transitive, et il n'existe donc qu'une seule orbite.

En revanche, pour $m = 4$, l'étude de la relation $\sim_4$ a montré l'existence de deux classes d'équivalence distinctes, celles de 0 et de $\frac{-1}{2}$. Ainsi, l'action de Γ_4 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ possède exactement deux orbites.

Nous terminons par une remarque technique concernant le choix du signe dans la définition de s_m .

Remarque. Le signe négatif dans la définition de $s_m(x) = -\frac{1}{mx}$ est choisi afin que la transformation soit représentée par une matrice de déterminant 1. Cela garantit que la matrice associée

$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{m}} \\ \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}$$

appartient bien à $SL_2(\mathbb{R})$, ce qui permet son interprétation dans $PSL_2(\mathbb{R})$.

Références

1. A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publications, Mineola, New York, 1997. (Traduction anglaise de l'édition originale russe.)
2. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.
3. A. Hatcher, *Topology of Numbers*, American Mathematical Society, 2022.
4. J.-P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, Springer-Verlag, 1973.

En particulier, le chapitre consacré au groupe modulaire et aux transformations homographiques constitue une référence classique sur le sujet.

5. C. Rousseau, *Les fractions continues*, Notes de cours, Université de Montréal.
Disponible à l'adresse : https://dms.umontreal.ca/~rousseac/chapitre_fraction_continue.pdf.