

# Autour des hypothèses du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann

*Rapport de stage de recherche*

SHAHINA ABDAL RAGUIME

03 Juillet 2026

# Table des matières

|                                                                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Remerciements</b>                                                                                             | <b>3</b>  |
| <b>1 Introduction</b>                                                                                            | <b>4</b>  |
| <b>2 Le théorème d'uniformisation</b>                                                                            | <b>4</b>  |
| 2.1 Préliminaires . . . . .                                                                                      | 4         |
| 2.2 Les surfaces de Riemann . . . . .                                                                            | 5         |
| 2.3 Surfaces simplement connexes . . . . .                                                                       | 9         |
| 2.4 Isomorphisme . . . . .                                                                                       | 9         |
| <b>3 Représentations paramétrique de la sphère et du tore</b>                                                    | <b>10</b> |
| 3.1 Sphère . . . . .                                                                                             | 10        |
| 3.1.1 Coordonnées sphériques . . . . .                                                                           | 10        |
| 3.1.2 Comment trouver l'équation cartésienne à partir des coordonnées<br>de la sphère ? . . . . .                | 10        |
| 3.1.3 Comment passer de l'équation cartésienne aux coordonnées sphériques ?                                      | 11        |
| 3.2 Tore . . . . .                                                                                               | 11        |
| 3.2.1 Coordonnées toriques . . . . .                                                                             | 11        |
| 3.2.2 Comment obtenir une équation cartésienne du tore à partir de sa<br>représentation paramétrique ? . . . . . | 12        |
| 3.2.3 Comment passer de l'équation paramétrique aux coordonnées carté-<br>siennes ? . . . . .                    | 12        |
| <b>4 La sphère, le tore et le théorème de Jordan</b>                                                             | <b>13</b> |
| 4.1 Le théorème de Jordan pour les courbes de classe $C^1$ . . . . .                                             | 13        |
| 4.2 Preuve de notre théorème . . . . .                                                                           | 17        |
| <b>5 Conclusion</b>                                                                                              | <b>21</b> |
| <b>6 Annexes</b>                                                                                                 | <b>23</b> |

## Remerciements

Je tiens à adresser mes sincères remerciements auprès de M.Dupaigne pour m'avoir encadré et accompagné tout au long de ce stage. La réussite de ce projet est le fruit de sa clarté d'explication et de sa pédagogie.

Je remercie tout particulièrement les enseignants-chercheurs ayant contribué de près ou de loin à ce projet.

# 1 Introduction

L'étude des surfaces de Riemann a longtemps fasciné les mathématiciens qu'ils soient spécialisés en géométrie, en analyse complexe ou en théorie des groupes. Un théorème, en particulier, a attiré l'attention au dix-neuvième siècle

*"Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à la sphère, au disque unité ouvert ou au plan"*

Tel est l'énoncé du célèbre théorème ayant bouleversé les siècles qui suivent.

Ce projet a pour but d'élucider ce théorème pour les non-spécialistes du domaine et pour observer l'importance des termes employés par Henri Poincaré et Félix Klein dans l'énoncé. Plus précisément, nous cherchons à savoir si la simple connexité est une hypothèse nécessaire pour qu'une surface de Riemann soit biholomorphe avec soit la sphère, le disque unité ouvert ou le plan.

Nous pouvons prendre en compte deux exemples de surfaces de Riemann : la sphère  $\mathbb{S}^2$  et le tore  $\mathbb{T}^2$  qui sont complexes et se proposer de démontrer le théorème suivant :

*La sphère et le tore ne sont pas  $C^1$ -difféomorphes*

Avant de le prouver, nous allons, dans un premier temps, définir ce que sont les surfaces de Riemann, ce qu'est une surface simplement connexe tout en étudiant si la sphère et le tore le sont. Puis, dans un second temps, nous allons montrer que la sphère et le tore ne sont pas  $C^1$ -difféomorphes en utilisant le théorème de Jordan pour les fonctions de classe  $C^1$ .

## 2 Le théorème d'uniformisation

### 2.1 Préliminaires

Dans cette partie, nous allons procéder à la définition des termes énoncés dans le théorème mais également des termes fondamentaux pour comprendre ce projet.

On considère donc  $(X, \mathcal{T}_X)$  comme étant un espace topologique.

**Définition 1** (carte). Une **carte** de dimension  $n > 0$  sur  $X$  est un homéomorphisme entre un ouvert de  $X$  et un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2** (atlas). Un **atlas** de dimension  $n > 0$  de  $X$  est une famille de cartes de dimension  $n$  dont les domaines recouvrent  $X$ .

**Définition 3** (variété). Une **variété** de classe  $C^r$  de dimension  $n$ , pour  $n > 0$ , est un espace topologique séparé et paracompact et d'un atlas  $\mathcal{A}$  avec les propositions suivantes :

- $\mathcal{A}$  recouvre  $X$  i.e.  $X \subset \bigcup_{\mathcal{A}} V_\alpha$
- Si  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$  alors  $\phi_{\beta,\alpha} := f_\beta^{-1} \circ f_\alpha|_{f_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)}$  allant de  $f_\alpha^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$  dans  $f_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.

Maintenant que nous avons défini les termes clés pour travailler avec une surface de Riemann, énonçons la définition de cette dernière.

## 2.2 Les surfaces de Riemann

**Définition 4** (surface de Riemann). On dit que  $X$  est une **surface de Riemann** s'il est séparé, connexe, muni d'un recouvrement  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  d'une famille  $(V_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $\mathbb{C}$ , d'homéomorphismes  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  tels que  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  soit un biholomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{C}$ . Autrement dit, il s'agit d'une variété de classe  $C^\infty$  de dimension 2 réelle telle que toute application de changements de carte soit un biholomorphisme entre des ouverts de  $\mathbb{C}$ .

*Exemple 1* (Plan). Pour ce qui est du plan, il s'agit d'une surface de Riemann. L'espace topologique est séparé, connexe muni d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  où l'un des  $\varphi_i$  correspond à l'application  $Id$  qui est un homéomorphisme vers un ouvert de  $\mathbb{C}$  et l'application changement de cartes est un biholomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{C}$ .

*Exemple 2* (Disque unité ouvert). De même que pour le plan, le disque unité ouvert, noté  $\mathbb{D}$ , est une surface de Riemann. L'espace topologique est séparé, connexe muni d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  où une des cartes est également l'application identité.

*Exemple 3* (Sphère). Montrons que la sphère est une surface de Riemann.

La sphère est un espace topologique, séparé et connexe.

Soit  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  et soit  $N$  son pôle Nord et  $S$  son pôle Sud. La projection stéréographique de la sphère, notée  $f_1$ , est de la forme :

$$f_1 : U_1 := \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \longmapsto z = \frac{p_1}{1 - p_3} + i \frac{p_2}{1 - p_3}$$

De même, on trouve que  $U_2 := \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}$  par l'application :

$$f_2 : U_2 := \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \longmapsto z = \frac{p_1}{1 - p_3} - i \frac{p_2}{1 - p_3}$$

L'application inverse de  $f_1$  est :

$$f_1^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

$$z \longmapsto \left( \frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

Posons  $f = f_2 \circ f_1^{-1}$  l'application de changements de cartes telle que

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

En posant  $u = \bar{z}$ , on obtient comme expression

$$f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$u \longmapsto \frac{1}{u}$$

Et on a bien que

- $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , un ouvert de  $\mathbb{C}$
- $f$  est bijectif et  $f^{-1}(w) = \frac{1}{w}$  pour  $w \in \mathbb{C}^*$

D'où,  $f$  est un *biholomorphisme*.

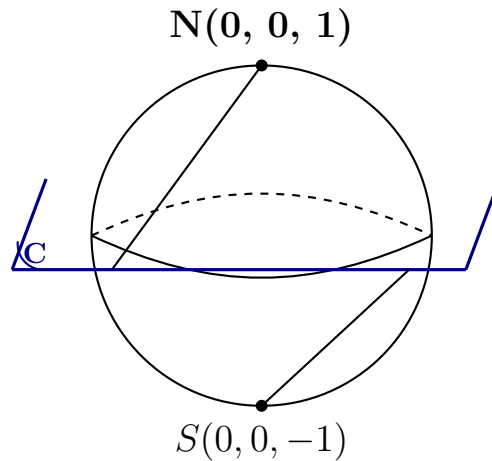


FIGURE 1 – Double projection stéréographique depuis les pôles Nord et Sud.

*Exemple 4 (Tore).* Montrons que le tore  $\mathbb{T}^2$  est une variété de classe  $C^\infty$ .

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \theta, \phi \in [0, 2\pi[ \text{ tel que } \begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \\ z = r \sin \theta \end{cases} \right\}$$

(L'écriture de la paramétrisation sera détaillée plus tard dans une section plus loin.)

Le tore est un espace topologique :

- séparé
- compact comme étant homéomorphe au produit de deux compacts qui sont les cercles unités  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Écrivons, à présent, l'atlas du tore.

*Lemme.* Le tore possède au moins deux cartes.

*Démonstration.* On a cette paramétrisation (4). Écrivons la paramétrisation locale correspondante.

Soit  $f : ]-\pi, \pi[^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, \lambda) \mapsto \left( (R + r \cos \theta) \cos \lambda, (R + r \cos \theta) \sin \lambda, r \sin \theta \right).$$

Cette fonction est continue. Montrons qu'elle est bijective.

**Injectivité :** Soient  $\theta, \theta', \lambda, \lambda' \in ]-\pi, \pi[$ .

Supposons que  $f(\theta, \lambda) = f(\theta', \phi')$ , donc

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \lambda, \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \lambda, \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

Par hypothèse, la troisième ligne (de (1)) nous donne :

$$\begin{aligned} r \sin \theta &= r \sin \theta' \\ \iff \sin \theta &= \sin \theta' \\ \iff \theta' &= \theta \text{ ou } \theta' = \pi - \theta \end{aligned}$$

Il y'a deux cas à considérer.

— **Cas 1 :**  $\theta' = \theta$

Alors les deux premières lignes de (1) nous donnent :

$$\begin{cases} (R + r \cos \theta) \cos \lambda = (R + r \cos \theta) \cos \lambda' \\ (R + r \cos \theta) \sin \lambda = (R + r \cos \theta) \sin \lambda' \end{cases}$$

En utilisant la formule d'analyse complexe<sup>1</sup>,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , on obtient

$$\begin{aligned} (R + r \cos \theta) e^{i\lambda} &= (R + r \cos \theta) e^{i\lambda'} \\ \text{donc,} \quad e^{i\lambda} &= e^{i\lambda'} \\ \text{donc,} \quad \lambda &= \lambda' \text{ ou } \lambda \equiv \lambda' \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Or, si  $\lambda \equiv \lambda' \pmod{2\pi}$ , alors  $\lambda = \lambda' + 2k\pi$ .

Or,  $] - \pi, \pi[$  est un intervalle ouvert où nous "retombons sur le même angle".

— **Cas 2 :**  $\theta' = \pi - \theta$

Alors, on a pour les deux premières lignes de (1) :

$$\begin{cases} (R + r \cos \theta) \cos \lambda = (R - r \cos \theta) \cos \lambda' \\ (R + r \cos \theta) \sin \lambda = (R - r \cos \theta) \sin \lambda' \end{cases}$$

i.e.  $(R + r \cos \theta) e^{i\lambda} = (R - r \cos \theta) e^{i\lambda'}$

Ici, nous sommes en présence de deux nombres complexes. Ils sont égaux si et seulement si leurs modules et leurs arguments sont égaux modulo  $2\pi$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} (R + r \cos \theta) e^{i\lambda} &= (R - r \cos \theta) e^{i\lambda'} \\ \text{ssi} \quad \begin{cases} R + r \cos \theta &= R - r \cos \theta \\ \lambda &\equiv \lambda' [2\pi] \end{cases} \\ \text{ssi} \quad \begin{cases} 2r \cos \theta &= 0 \\ \lambda &\equiv \lambda' [2\pi] \end{cases} \\ \text{ssi} \quad \begin{cases} \cos \theta &= 0 \\ \lambda &\equiv \lambda' [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

---

1. Formule d'Euler

Pour ce qui est de  $\lambda \equiv \lambda' [2\pi]$ , comme  $\lambda, \lambda' \in ]-\pi, \pi[$  alors  $\lambda = \lambda'$ .

Pour  $\cos \theta = 0$ , ceci est vrai pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

— Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\theta' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$  donc  $\theta = \theta'$

— Si  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , alors  $\theta' = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$  donc  $\theta = \theta'$

Dans tous les cas on arrive à la conclusion :  $\theta = \theta'$  et  $\lambda = \lambda'$  pour  $\theta, \theta', \lambda, \lambda' \in ]-\pi, \pi[$ . Ce qui prouve l'injectivité.

**Surjectivité :**  $f$  est une fonction surjective par définition.

Montrons que sa réciproque est continue. Pour cela, nous allons admettre ce théorème du cours de topologie :

*Théorème 1. Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques avec  $(X, d_X)$  compact. Soit  $f : X \rightarrow Y$  continue, bijective. Alors  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est continue.*

Étant donné que nous avons des ouverts comme ensembles de définition pour  $\theta$  et  $\phi$ , nous allons donc prendre des ensembles compacts contenant chacune des extrémités des intervalles.

Pour  $-\pi$ , on considère la fonction

$$f_\epsilon : [-\pi + \epsilon, 0]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \lambda) \mapsto \left( (R + r \cos \theta) \cos \lambda, (R + r \cos \theta) \sin \lambda, r \sin \theta \right).$$

Cette fonction  $f_\epsilon$  est continue et bijective. Par le théorème (1), la fonction  $f_\epsilon^{-1}$  est continue, donc  $f_\epsilon$  est un homéomorphisme.

De plus, les fonctions  $f_{[-\pi, 0]}$  et  $f_\epsilon$  coïncident au voisinage de  $-\pi$ , donc  $f_{[-\pi, 0]}$  est un homéomorphisme.

De même, pour  $\pi$ , on considère la fonction

$$f_\eta : [0, \pi - \eta]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \lambda) \mapsto \left( (R + r \cos \theta) \cos \lambda, (R + r \cos \theta) \sin \lambda, r \sin \theta \right).$$

Donc, nous avons que  $f$  est un homéomorphisme de  $] -\pi, \pi[$  dans  $V$ , où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

Voici une carte. L'autre carte recouvre l'un des deux cercles exclus.

En effet,

—  $\theta = -\pi, \lambda \in [-\pi, \pi[$  :

Soit la fonction  $g$ , paramétrisant le tore  $\mathbb{T}^2$  :

$$g : [-\pi, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \lambda) \mapsto \left( (R + r \cos \theta) \cos \lambda, (R + r \cos \theta) \sin \lambda, r \sin \theta \right).$$

On a  $g(-\pi, \lambda) = ((R + r \cos \theta) \cos \lambda, (R + r \cos \theta) \sin \lambda, 0)$

$g(-\pi, \cdot)$  est donc l'équation du cercle centré en  $(0, 0)$  et de rayon  $R - r$ .

- $\lambda = -\pi, \theta \in [-\pi, \pi[$ , on obtient :  
 $g(-\pi, \lambda) = ((R + r \cos \theta) \cos \lambda, 0, r \sin \theta)$   
 Il s'agit cette fois-ci du cercle centré en  $(-R, 0)$  et de rayon  $r$ .

□

## 2.3 Surfaces simplement connexes

**Définition 5** (espace topologique simplement connexe). On dit que  $X$  est un **espace topologique simplement connexe** s'il est connexe par arcs et si tout lacet tracé sur  $X$  est homotope à un point.

**Définition 6** (chemins homotopes). Deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont dits **homotopes** s'il existe une application continue  $H$  de  $[0, 1]^2$  vers  $\mathbb{C}$  telle que

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1], H(0, t) &= \gamma_1(t) \\ H(1, t) &= \gamma_2(t)\end{aligned}$$

*Exemple 5* (Plan et Disque unité). On considère l'application

$$\begin{aligned}H : [0, 1] \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) &\mapsto H(s, t) = s\gamma(t)\end{aligned}$$

Cette application est continue et  $H(0, t) = 0, \forall t \in [a, b]$  et  $H(1, t) = \gamma(t), \forall t \in [a, b]$ .

*Exemple 6* (Sphère). Montrons que la sphère  $\mathbb{S}^2$  est simplement connexe.

Soit  $\gamma$  un lacet sur la sphère. On sait que  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}$  par la projection stéréographique, que l'on note  $\psi$ . Ainsi, on projette le lacet  $\gamma$  sur  $\mathbb{C}$ . On sait que le plan complexe est simplement connexe et donc on peut contracter  $\gamma$  sur  $\mathbb{C}$ .

On compose par la projection stéréographique inverse, notée  $\psi^{-1}$  et on obtient donc, par composée d'applications continues, l'homotopie suivante :  $H(s, t) = \psi^{-1}(s\psi(\gamma(t)))$ .

*Contre-Exemple 1* (Tore). Le tore est une surface de Riemann non simplement connexe.

## 2.4 Isomorphisme

**Définition 7** (Isomorphisme). Une application  $\varphi$  est dite **isomorphe** entre deux surfaces de Riemann  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  si elle est :

- $\varphi$  homéomorphe entre les deux surfaces
- $\varphi$  est biholomorphe entre les deux ouverts de  $\mathbb{C}$ .

*Exemple 7*. Le plan  $\mathbb{C}$  et le disque unité  $\mathbb{D}$  sont isomorphes.

*Contre-Exemple 2*. Le tore et le plan ne sont pas isomorphes. En effet, le tore est une surface compacte comme étant un ensemble fermé-borné inclus dans  $\mathbb{R}^3$  tandis que le plan est une surface non compacte. Or, un isomorphisme est en particulier un homéomorphisme et la compacité est un invariant topologique. Donc, le plan et le tore ne sont donc pas isomorphes. D'autre part, le disque unité ouvert est inclus dans  $\mathbb{R}^2$ . Les seuls ensembles fermés-bornés dans  $\mathbb{R}^n$  sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, le disque unité ne peut être un fermé et donc ne peut pas être un compact. De même que pour le plan, le tore et le disque ouvert ne sont pas homéomorphes donc non isomorphes.

De par ces définitions et exemples, nous pouvons constater que le tore n'est, d'une part, pas simplement connexe et, d'autre part, non isomorphe au plan ou au disque. En s'appuyant sur le théorème d'uniformisation, nous pouvons nous demander si le tore est isomorphe à la sphère et si la simple connexité est un critère fondamental d'isomorphisme.

Nous allons donc, dans un second temps, porter notre attention sur la sphère et le tore et étudier ces deux surfaces de Riemann plus en détail.

### 3 Représentations paramétrique de la sphère et du tore

Commençons donc par écrire une paramétrisation de la sphère et du tore.

#### 3.1 Sphère

##### 3.1.1 Coordonnées sphériques

On peut retrouver les coordonnées de  $A$  représentées dans la figure en Annexe. Ici, on choisit  $r$  comme distance entre l'origine du repère et  $A$ . On a un angle  $\theta \in [0, \pi[$  formé entre  $[OA]$  et  $[OB']$ . Puis, un angle  $\phi \in [0, 2\pi[$  formé entre  $[OA']$  et  $[OB]$ .

On cherche donc les coordonnées du point  $A$ , situé sur la sphère.  
En  $\vec{k}$  : comme  $A$  se situe sur l'axe  $\vec{k}$  en hauteur, on peut donc voir par la représentation que les coordonnées de  $A$  sur  $\vec{k}$ .  
à l'aide des formules trigonométriques, nous savons donc que  $\cos \theta = \frac{OB'}{r}$ . La coordonnée en  $z$  est donc  $r \cos \theta$ .

En  $\vec{i}$  : on projette ici  $A$  sur le repère  $\vec{i}, \vec{j}$ , on obtient  $A'$ . Nous cherchons donc  $[OA']$  et on applique la formule trigonométrique suivante :  $\cos \phi = \frac{OA'}{r}$  donc  $OA' = r \cos \phi$ .  
Et il y a le paramètre  $\theta$  entrant en jeu, d'où : la coordonnée en  $x$  de  $A$  est  $x = r \cos \phi \sin \theta$ .

En  $\vec{j}$  : de la même manière que pour  $\vec{i}$ , on projette  $A$  sur le repère  $\vec{i}, \vec{j}$  perpendiculairement. On obtient par les formules trigonométriques sur le triangle rectangle (insérer triangle).

##### 3.1.2 Comment trouver l'équation cartésienne à partir des coordonnées de la sphère ?

Par les résultats obtenus précédemment, on a donc que :  
Pour  $A \in \mathbb{S}^2$ ,  $A = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$  avec  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi[, \phi \in [0, 2\pi[$

On peut remarquer que, par la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ , on peut obtenir une équation ne dépendant plus des angles  $\theta$  ou  $\phi$  :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \end{aligned}$$

D'où pour la sphère unité, nous avons :

$$\mathbb{S}^2 \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

### 3.1.3 Comment passer de l'équation cartésienne aux coordonnées sphériques ?

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ , alors  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

En particulier,  $z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

donc,  $|z| \leq |r| = r$ , puisque  $r > 0$

donc,  $z \in [-r, r]$

donc,  $\exists \theta \in [0, \pi]$  tel que  $z = r \cos \theta$

De cette manière, on peut également trouver que :

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \theta$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = r^2(1 - \cos^2 \theta)$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{donc, } (x, y) \in \mathcal{C}(0, r \sin \theta) = \mathcal{C}(0, r \sin \theta)$$

Comme  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\sin \theta \geq 0$ .

D'où,

$$\mathbb{S}^2 \supset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

**Donc,**

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (2)$$

## 3.2 Tore

### 3.2.1 Coordonnées toriques

Le tore est obtenu par la rotation d'un cercle  $\mathcal{C}'$  centré en un point différent de 0, de rayon  $r$  autour de l'axe  $\vec{k}$ .

Ainsi, pour obtenir une représentation paramétrique d'un tore, nous allons représenter sur un repère à trois axes  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le tore à l'aide de quatre paramètres qui sont :

- $r$  le rayon du petit cercle, noté  $\mathcal{C}'$ , effectuant la notation autour de  $\vec{k}$
- $\theta$  l'angle compris entre  $[0, \pi[$  formé entre  $[O'r]$  et  $[O(R+r)]$
- $O'$  le centre du cercle  $\mathcal{C}'$  de rayon  $r$
- $R$  la distance entre l'origine  $O$  et le milieu du cercle  $\mathcal{C}'$
- $\phi$  l'angle compris entre  $[O, 2\pi[$  formé entre l'axe  $\vec{i}$  et  $[OO']$

On place donc un point  $M$  sur le petit cercle et déterminons ses coordonnées cartésiennes. Pour atteindre le point  $M$ , on peut voir que  $R$  et  $r$  rentrent en jeu. D'où les coordonnées selon les axes  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dépendent en particulier de ces deux paramètres.

Sur l'axe  $\vec{i}$ , les coordonnées sont : la distance de  $M$  par rapport à  $O'$  est  $R$ .

Les coordonnées dépendent de  $\theta$  et de  $\phi$ . on se place sur le triangle rectangle suivant.

D'où la distance depuis l'origine  $O$  de  $M$  est  $R + r \cos \theta$ .

En ajoutant le paramètre  $\phi$ , on obtient  $(R + r \cos \theta) \cos \phi$

Sur l'axe  $\vec{j}$ , il en est de même que sur  $\vec{i}$  avec  $\sin \phi$  :  $(R + r \cos \theta) \sin \phi$ .

Sur l'axe  $\vec{k}$ ,  $M$  ne dépend plus du rayon  $R$  ou de  $\phi$ , donc la coordonnée sur  $\vec{k}$  est :  $r \sin \theta$ .

Ainsi, les coordonnées cartésiennes du tore sont  $((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$ .

### 3.2.2 Comment obtenir une équation cartésienne du tore à partir de sa représentation paramétrique ?

Comme les coordonnées en  $x$  et  $y$  dépendent du  $\sin \phi$  et du  $\cos \phi$ , on peut donc les mettre au carré pour utiliser la relation  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (R + r \cos \theta)^2 \cos^2 \phi + (R + r \cos \theta)^2 \sin^2 \phi \\ &= (R + r \cos \theta)^2 \\ &= R^2 + 2Rr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

On rajoute  $z^2$ ,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 + 2Rr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= R^2 + 2Rr \cos \theta + r^2 \end{aligned}$$

On soustrait, à l'équation trouvée,  $R^2$  et  $r^2$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = 2Rr \cos \theta$$

En mettant au carré cette équation, on a :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 &= 4R^2 r^2 \cos^2 \theta \\ &= 4R^2 r^2 (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 4R^2 (r^2 - z^2) \end{aligned}$$

### 3.2.3 Comment passer de l'équation paramétrique aux coordonnées cartésiennes ?

On a  $(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2 (r^2 - z^2)$ .

En particulier,  $4R^2 (r^2 - z^2) \geq 0$ ,

$$\text{donc, } r^2 - z^2 \geq 0$$

$$\text{donc, } z^2 \leq r^2$$

$$\text{donc, } |z| \leq r \text{ avec } r \geq 0$$

$$\text{donc, } z \in [-r, r]$$

D'où,  $\exists \theta \in [0, 2\pi[$  tel que  $z = r \sin \theta$ .

De même,  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = \pm \sqrt{4R^2(r^2 - z^2)}$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2 = \pm 2R\sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 + r^2 \sin^2 \theta = \pm 2R\sqrt{r^2 - z^2} + R^2 + r^2$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = \pm 2R\sqrt{r^2 \cos^2 \theta} + R^2 - r^2 - r^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = \pm 2R|r \cos \theta| + R^2 + r^2(1 - \sin^2 \theta)$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = \pm 2R|r \cos \theta| + R^2 + r^2 \cos^2 \theta$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 = (R \pm r|\cos \theta|)^2$$

Or,  $x^2 \leq x^2 + y^2 = (R \pm r \cos \theta)^2$ , donc  $|x| \leq R + r \cos \theta$ .

Donc,  $\exists \phi \in [0, 2\pi[$  tel que  $x = (R + r \cos \theta) \cos \phi$ .

On retrouve bien la coordonnée en  $x$ .

Avec un même calcul que sur la sphère, on retrouve la coordonnée de  $y$  :

$y = (R + r \cos \theta) \sin \phi$ , avec  $\phi \in [0, 2\pi[$ .

Ainsi,

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \theta, \phi \in [0, 2\pi[ \text{ tel que } \begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \\ z = r \sin \theta \end{cases} \right\} \quad (3)$$

Maintenant que nous avons pu voir en détail une paramétrisation de la sphère (2) et du tore (3), nous disposons dorénavant de tous les outils nous permettant de montrer que la sphère et le tore ne sont pas  $\mathbb{C}^1$ -difféomorphes.

## 4 La sphère, le tore et le théorème de Jordan

### 4.1 Le théorème de Jordan pour les courbes de classe $C^1$

L'outil fondamental pour pouvoir aboutir la preuve de ce théorème est le théorème de Jordan. Nous allons donc observer, comprendre et démontrer cet énoncé afin de l'utiliser à bon escient dans notre preuve.

**Théorème 2.**  *$L$  est un réel strictement positif et  $\gamma$  est une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que :*

1.  $\gamma(0) = 0$
2. pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\gamma'(t)| = 1$
3.  $\gamma'(0) = 1$
4.  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \gamma(s) = \gamma(t) \text{ ssi } s - t \in L\mathbb{Z} \text{ (périodicité)}$

Soit  $\Gamma$  la courbe  $\gamma(\mathbb{R})$ . Alors  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a deux composantes connexes (l'une bornée, l'autre non).

*Démonstration.* Observons les différentes étapes de cette preuve

1. Montrons le lemme suivant, si  $\delta > 0$ , on note :

$$\begin{aligned}\gamma_\delta^+(t) &= \gamma(t) + i\delta\gamma'(t), \quad z_\delta^+ = \gamma_\delta^+(t) \\ \gamma_\delta^-(t) &= \gamma(t) - i\delta\gamma'(t), \quad z_\delta^- = \gamma_\delta^-(t)\end{aligned}$$

Montrons qu'il existe donc  $\alpha > 0$  tel que :  $0 < \delta < \alpha \implies \gamma_\delta^+(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \gamma_\delta^-(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \emptyset$

2. Si  $0 < \delta < \alpha$ , montrer que tout point de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  peut être joint à au moins un des points  $z_\delta^+$  ou  $z_\delta^-$  par un arc contenu dans  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  (on considérera, si  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , le point de  $\Gamma$  le plus proche de  $z$ ). Ceci montrera l'existence d'au moins deux composantes connexes.

3. Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ , soit  $Ind(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ .

Montrons que  $Ind(z_\delta^+, \gamma) - Ind(z_\delta^-, \gamma) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$ .

4. Conclure :  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a exactement deux composantes connexes.

1. Comme  $\gamma$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma'$  est continue sur  $[0, L]$ . Par le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur  $[0, L]$ . Or, la fonction dérivée d'une fonction périodique est également périodique. Donc  $\gamma'$  est  $L$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\gamma'$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\eta > 0$  fixé tel que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2; |s - t| < \eta \implies |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < 1$$

On fixe la variable  $t \in \mathbb{R}$  et on pose  $k_t$  : telle que

$$\begin{aligned}k_t : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \gamma(s) - \gamma(t) - (s - t)\gamma'(t).\end{aligned}$$

$k_t$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit et somme de fonctions dérivables et on a,

$$\forall s \in \mathbb{R}, k'_t(s) = \gamma'(s) - \gamma'(t)$$

Donc si  $|k - t| < \eta$ , alors  $|k'(s)| < 1$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}k_t(s) &= |\gamma(s) - \gamma(t) - (s - t)\gamma'(t)| < |s - t|, \forall s \in ]t - \eta, t + \eta[ \\ &\text{(on a entre autre appliqué l'inégalité des accroissements finis à } k_t)\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, |s - t| < \eta \implies |\gamma(s) - \gamma(t) - (s - t)\gamma'(t)| < |s - t| \quad (4)$$

Posons maintenant,  $K = (s, t) \in [0, L]^2, L - \eta \geq |s - t| \geq \eta$ .  $K$  est compact de  $\mathbb{R}^2$  comme fermé-borné de  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $(s, t) \mapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$  étant continue sur  $K$ , elle y atteint un minimum par le théorème des bornes atteintes. On note ce minimum  $\alpha = \min_{(s, t) \in K} |\gamma(s_0) - \gamma(t_0)|$  pour un certain  $(s_0, t_0) \in K$ . Comme  $(s_0, t_0) \in K$ , alors  $s_0 \neq t_0$  et  $s_0 \neq t_0 + L$ . Or,  $\gamma$  est injective sur  $[0, L[$ , donc  $\gamma(s_0) \neq \gamma(t_0)$ . Donc  $\alpha > 0$ .

Ainsi,

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, L - \eta \geq |s - t| \geq \eta \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| \geq \alpha$$

Et comme  $\gamma$  est  $L$ -périodique, alors

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, (\forall n \in \mathbb{Z}, |s - t - nL| \geq \eta) \implies |\gamma(t) - \gamma(s)| \geq \alpha \quad (5)$$

Soit  $\delta \in ]0, \alpha[$ . Supposons par l'absurde que  $\Gamma \cap \gamma_\delta^-(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .

Il existe donc  $u \in \Gamma \cap \gamma_\delta^-(\mathbb{R})$  tel que  $u \in \Gamma$  et  $u \in \gamma_\delta^-(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\gamma(t) = \gamma_\delta^+(t) = \gamma(s) + i\delta\gamma'(s)$ .

Comme  $|\gamma'(s)| = 1$ , alors  $|\gamma(t) - \gamma(s)| = |i\delta\gamma'(s)| = \delta < \alpha$ .

Par contraposée de la relation (5), il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|s - t - nL| < \eta$ . Quitte à changer  $s$  en  $s - nL$  par périodicité, supposons  $n = 0$ . Donc  $|s - t| < \eta$ .

D'après (4),

$$\begin{aligned} |t - s| &> |\gamma(t) - \gamma(s) - (t - s)\gamma'(s)| = |\gamma'(s)(i\delta - (t - s))| \\ &= |i\delta - (t - s)| \end{aligned}$$

D'où  $\Gamma \cap \gamma_\delta^+(\mathbb{R}) = \emptyset$ . De même, on montre que  $\Gamma \cap \gamma_\delta^-(\mathbb{R}) = \emptyset$ .

2. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Soit  $\phi : t \rightarrow |\gamma'(t) - z|^2$  une application définie sur  $[0, L]$ .  $\phi$  est continue sur un compact,  $\phi$  atteint un maximum en un certain  $t_0 \in [0, L]$ . De plus,  $\phi$  est dérivable sur  $[0, L]$  et  $\forall t \in [0, L]$  :

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt}[(\gamma(t) - z)\overline{(\gamma(t) - z)}] \\ &= \gamma'(t)\overline{(\gamma(t) - z)} + \overline{\gamma'(t)}(\gamma(t) - z) \\ &= 2\Re[(\gamma'(t)(\gamma(t) - z))] \end{aligned}$$

Comme  $t_0$  est un minimum de  $\phi$ , alors  $\phi'(t_0) = 0$ .

Donc,  $2\Re[(\gamma'(t)(\gamma(t) - z))] = 0$  et donc  $\gamma(t_0) - z \perp \gamma'(t_0)$  et en particulier  $\gamma(t_0) - z$  et  $i\gamma'(t_0)$  sont colinéaires.

Donc  $\gamma_\delta^+(t_0) \in [\gamma(t_0), z) \cap \Gamma_\delta^+$  et  $\gamma_\delta^-(t_0) \in [\gamma(t_0), z) \cap \Gamma_\delta^-$ , et les deux ensembles ne sont donc pas vides.

En prenant  $\gamma_\delta^+(t_0) \in [\gamma(t_0), z) \cap \Gamma_\delta^+$ , on a deux cas différents :

— **1er cas** :  $\gamma(t_0), \gamma_\delta^+(t_0)$  et  $z$  sont dans cet ordre. Alors si  $[\gamma_\delta^+(t_0), z] \cap \Gamma \neq \emptyset$ , ceci contredirait la minimalité de  $|\gamma(t_0) - z|$ .

— **2e cas** : Supposons que  $\gamma(t_0), z$  et  $\gamma_\delta^+(t_0)$  soient alignés dans cet ordre.

Alors si  $[\gamma(t_0), z] \cap \Gamma \neq \emptyset, \exists \lambda \in [\gamma_\delta^+(t_0), z] \cap \Gamma$ .

Et donc,  $\lambda \in \Gamma_\delta^+$ , avec  $\epsilon' \leq \epsilon$ , contradiction avec le lemme énoncé auparavant.

Dans les deux cas,  $z$  peut être joint à  $\gamma(t_0) - i\delta\gamma'(t_0)$  par un segment ne coupant pas  $\Gamma$ .

Donc il existe un chemin reliant  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$  à  $\Gamma_\delta^+$  ou à  $\Gamma_\delta^-$ .

D'où,  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  possède deux composantes connexes au plus.

$$3. \text{ Pour } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \text{ soit } Ind(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

1.  $Ind(z, \gamma) \in \mathbb{Z}$

Soit l'application

$$\phi : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \mapsto \exp \left( \int_{-L/2}^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right).$$

$\phi$  est de dérivée nulle, donc constante. Par suite,  $F(\frac{L}{2}) = 1$  et  $Ind(z, \gamma) \in \mathbb{Z}$

2. Montrons que  $Ind(z_\delta^+, \gamma) - Ind(z_\delta^-, \gamma) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$

$$\begin{aligned}
 Ind(z_\delta^+, \gamma) - Ind(z_\delta^-, \gamma) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_\delta^+} - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_\delta^-} \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \left( \int_\gamma \frac{dz}{z - i\delta} - \int_\gamma \frac{dz}{z + i\delta} \right) \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - i\delta} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) + i\delta} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)(\gamma(t) + i\delta) - \gamma'(t)(\gamma(t) - i\delta)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)2i\delta}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \right) \\
 &= \frac{\delta}{\pi} \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \right)
 \end{aligned}$$

Le dénominateur ne s'annule pas puisque  $\delta \neq 0$  comme  $i\delta \notin \Gamma$ .

Posons  $a(t) = \frac{\gamma(t)}{t}$ , la fonction  $a$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et prolongeable par continuité

en 0 car  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} = \gamma'(0) = 1$ .

Donc  $a(t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$  et donc  $\exists \epsilon \in ]0, \frac{L}{2}[$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \epsilon \implies |a(t)^2 - 1| < \omega$$

En particulier,  $\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \epsilon \implies |a(t)^2 - 1| < \frac{1}{2}$

$$\frac{\delta}{\pi} \left( \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \right) = \frac{\delta}{\pi} \left( \underbrace{\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt}_{=I} + \underbrace{\int_{\epsilon < |t| < \frac{L}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt}_{=J} \right)$$

Pour  $I$ , effectuons le changement de variables suivant

$$t = \delta w \text{ et la fonction est } C^1$$

$$dt = \delta w$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt &= \frac{\delta^2}{\pi} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \frac{\gamma'(\delta w)}{\gamma^2(\delta w) + \delta^2} dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\delta w)}{w^2 \frac{\gamma^2(\delta w)}{\delta^2 w^2} + 1} \chi_{[-\epsilon/2, \epsilon/2]}(w) dw \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\delta w)}{w^2 a^2(w) + 1} \chi_{[-\epsilon/2, \epsilon/2]}(w) dw
 \end{aligned}$$

Or,  $\frac{\gamma'(\delta w)}{w^2 a^2(w) + 1} \chi_{[-\epsilon/2, \epsilon/2]}(w) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{w^2 + 1}$  (car  $a$  et  $\gamma'$  sont continues en 0) et

$$\left| \frac{\gamma'(\delta w)}{w^2 a^2(\delta w) + 1} \right| \leq \frac{1}{|w^2 a^2(\delta w) + 1|} \leq \frac{1}{1 + s^2 \Re(a(\delta w))^2} \leq \frac{1}{1 + \frac{t^2}{2}}$$

puisque  $\Re(a(\delta w)^2) \geq \frac{1}{2}$  par  $|a^2(t) - 1| < \frac{1}{2}$

Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\frac{\delta}{\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + t^2} = 1$$

Pour  $J$ ,  $|\gamma|$  est continue et strictement positive sur le compact  $\{t \in \mathbb{R} | \epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{2}\}$  ( $\gamma|_{[0,1]}$  injective et  $\gamma(0) = 0$ ). Donc  $|\gamma|$  est minorée par une constante  $m > 0$ .  
Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \epsilon \leq |t| \leq \frac{1}{2} \implies \left| \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} \right| = \frac{1}{|\gamma(t)^2 + \delta^2|} \leq \frac{1}{m^2 + \delta^2}$$

$$\text{et } \int_{\epsilon < |t| < \frac{1}{2}} \left| \frac{1}{2\delta^2} \right| dt < +\infty.$$

Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\epsilon < |t| < \frac{1}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon < |t| < \frac{1}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2} dt$$

$$\text{Donc, } \frac{\delta}{\pi} \int_{\epsilon < |t| < \frac{1}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \delta^2} dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$$

**Conclusion :**  $Ind(z_{\delta}^+, \gamma) - Ind(z_{\delta}^-, \gamma) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$

4. On sait par le point 2. que  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  possède au plus deux composantes connexes.  
Si  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  était connexe, alors la fonction  $Ind(\cdot, \gamma)$ , continue sur  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , serait constante, ce qui contredit le résultat de 3.b).  
Donc  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a exactement deux composantes connexes.  $\square$

## 4.2 Preuve de notre théorème

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un  $C^1$ -difféomorphisme entre la sphère et le tore. On note cette application  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Comme le tore et la sphère sont des surfaces de Riemann (et donc des variétés de classe  $C^\infty$ ), alors ceci signifie que :

- $g$  est un homéomorphisme entre le tore et la sphère
  - Pour toute carte  $\phi$  sur le tore et  $\psi$  sur la sphère,  $\psi \circ g \circ \phi^{-1}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.
- (Ainsi, comme le montre le schéma ci-dessous, à la fin de la preuve )

Comme  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^2$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, alors pour un certain point  $p \in \mathbb{T}$ ,  $g : \mathbb{T} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  est un  $C^1$ -difféomorphisme où  $N$  est le pôle Nord.  
On sait également que  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  est  $C^1$ -difféomorphe à  $\mathbb{C}$  par la projection stéréographique, notée  $\Pi$ . Donc, on a un  $C^1$ -difféomorphisme  $h : \mathbb{T} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ .  
Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du tore paramétré par l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi[ &\rightarrow \mathbb{T} \setminus \{p\} \\ t &\mapsto ((R + r)e^{it}, 0) \end{aligned}$$

On note pour

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = h(\varphi(t))\end{aligned}$$

$\gamma$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $[0, 2\pi[$  dans  $\gamma([0, 2\pi[)$ . Il s'agit d'un lacet simple dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$  le support de ce lacet.

Par ailleurs, nous savons que le tore est connexe. Or, le tore privé d'un cercle est également connexe. En effet, montrons ce lemme pour n'importe quel cercle du tore. Soit

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, \lambda) &\mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\lambda, (R + r\cos\theta)\sin\lambda, r\sin\theta)\end{aligned}$$

une application continue.

Cette fonction  $f$  correspond à la paramétrisation d'un point du tore. En évaluant  $f$  pour  $\theta = 0$ , on a que :

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 \\ \sin\theta &= 0\end{aligned}$$

. Ainsi,

$$\begin{aligned}f(0, \lambda) &= (R + r)\cos\lambda, (R + r)\sin\lambda, r\sin\theta \\ &= C(0, R + r)\end{aligned}$$

$f(0, \cdot)$  représente donc un cercle centré en 0 et de rayon  $R + r$ . On le note  $\mathcal{C}'$ .

On retire ce cercle à  $\mathbb{T}$  et on obtient  $\mathbb{T} \setminus \mathcal{C}' = f([0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[)$ . Or,  $]0, 2\pi[^2$  est connexe comme produit de deux connexes de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction continue de  $]0, 2\pi[^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe et donc  $\mathbb{T} \setminus \mathcal{C}'$  est connexe. Ceci est valable pour tout cercle dont le cercle  $\mathcal{C}$  paramétré par  $\varphi$ . Il reste donc à voir si  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  est connexe. Pour aboutir à une absurdité, nous souhaitons appliquer le théorème de Jordan pour les courbes de classe  $C^1$ . Pour l'appliquer, il faut que notre lacet  $\gamma$  vérifie les conditions suivantes :

- $\gamma(t) \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}$
- $\gamma$  doit être  $C^1$
- $\gamma$  doit être  $L$ -périodique pour un certain  $L > 0$
- $\gamma$  doit être injective sur  $[0, L[$
- $\gamma(0) = 0$
- $\gamma'(0) = 1$
- $|\gamma'(t)| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Pour le reste de la preuve, nous allons considérer la restriction  $\gamma|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . L'application  $\gamma|_{[0,1]} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$ , est un lacet simple donc injective sur  $[0, 1]$ . On

peut également voir que sur  $[0, 1]$ ,  $\gamma$  est périodique et on peut étendre sa périodicité sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Il ne reste plus qu'à vérifier les trois dernières propriétés. Pour cela, nous allons reparamétriser  $\gamma$  afin d'obtenir un lacet tel que  $|\gamma'(t)| = 1, \forall t \in [0, 1]$ .

Si  $\forall t \in [0, 1], |\gamma'(t)| = 1$  alors ceci équivaut à  $\int_0^t |\gamma'(x)| dx = \int_0^t 1 dx, \forall t \in [0, 1]$ .

Notons

$$F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \int_0^t |\gamma'(x)| dx$$

$F$  est, par définition,  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et donc, en particulier, continue et dérivable sur  $[0, 1]$  et :  $\forall t \in [0, 1], F'(t) = |\gamma'(t)| \geq 0$

En effectuant le tableau de variations de  $F$ , on a que : (insérer tableau)

Donc  $F$  est croissante sur  $[0, 1]$ . De plus,  $F$  est positive sur  $[0, 1]$ . Pour obtenir une fonction réciproque à  $F$ , montrons qu'elle est bijective de  $[0, 1]$  à  $[0, L]$ .

— **Surjectivité** : Comme  $F$  est continue sur  $[0, 1]$  et qu'elle est positive, alors par le théorème des valeurs intermédiaires,  $F$  est surjective.

— **Injectivité** : Soient  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ .

Supposons que  $F(t_1) = F(t_2)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^{t_1} |\gamma'(x)| dx &= \int_a^{t_2} |\gamma'(x)| dx \\ \text{donc } \int_a^{t_1} |\gamma'(x)| dx - \int_a^{t_2} |\gamma'(x)| dx &= 0 \\ \text{donc } \int_a^{t_1} |\gamma'(x)| dx + \int_{t_2}^a |\gamma'(x)| dx &= 0 \\ \text{donc } \int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(x)| dx &= 0 \end{aligned}$$

$[t_2, t_1]$  est un intervalle fermé-borné,  $x \mapsto |\gamma'(x)|$  est une fonction positive et continue sur  $[t_2, t_1] \subset [0, 1]$  telle que  $\int_{t_2}^{t_1} |\gamma'(x)| dx = 0$ . Donc,  $|\gamma'(x)| = 0, \forall x \in [t_2, t_1]$ . En particulier,  $|\gamma'(x)| = 0, \forall x \in [t_2, t_1]$ .

Comme  $[t_2, t_1]$  est connexe de  $\mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow \gamma(x)$  est constante sur cet intervalle et donc  $\gamma(t_2) = \gamma(t_1)$ . Donc  $t_2 = t_1$  puisque  $\gamma$  est injective.

D'où  $F$  est injective.

Ainsi,  $F$  est bijective et donc on peut considérer la reparamétrisation de  $\gamma$  suivante :

$$\tilde{\gamma} : \gamma \circ F^{-1} \text{ où } F^{-1} : [0, L] \rightarrow [0, 1] \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme} \\ \text{avec } L = F(1), \text{ longueur du lacet } \gamma$$

Pour que cette reparamétrisation de  $\gamma$  soit vraie, il faut que  $(F^{-1})' > 0$ . On sait que  $(F^{-1})' \geq 0$  et donc, on montre que  $(F^{-1})' \neq 0$ . Montrer ceci revient à montrer que  $\gamma'(t) \neq 0$  si  $\gamma$  est un  $C^1$ -difféomorphisme où  $\gamma = h \circ \varphi$ .

Ceci est vrai puisque  $h$  et  $\varphi$  sont des  $C^1$ -difféomorphismes donc par composition de  $C^1$ -difféomorphismes,  $\gamma$  l'est. Supposons, par l'absurde, que  $\gamma'(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$

Cas 1 : : Si c'est le cas pour tout  $t \in [a, b]$ , alors ceci contredit l'injectivité i.e. la bijectivité de  $\gamma'$ .

Cas 2 : : Si  $\gamma'(t_0) = 0$  pour  $t_0 \in [a, b]$ ,  
alors  $D_{\varphi'(t_0)(h)=0}$  et

donc  $\varphi'(t_0) \in \ker(D(h))$   
donc  $\ker(D(h)) \neq \{0\}$   
donc  $Dh$  n'est pas injectif

Le corollaire du théorème d'inversion locale suivant nous permettra de conclure.

**Corollaire 1.** *Soient  $E, F$  des espaces de Banach. Soit  $U \subset E$  un ouvert dans  $E$ . Soit  $f : U \rightarrow F$  une fonction de classe  $C^1$ .*

*Alors  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans un ouvert de  $F$  ssi :*

- i)  $f$  est injective*
- ii)  $D_x f \in \text{Isom}(E, F), \forall x \in U$*

Ainsi, d'après le corollaire, la différentielle d'un  $C^1$ -difféomorphisme est toujours bijectif, ce qui rentre en **contradiction** avec notre résultat.

**Conclusion :** Donc  $\forall t \in [0, L], (F^{-1})'(t) \neq 0$ .

Comme  $(F^{-1})'(t) \neq 0$  pour  $t \in [0, L]$ , on a donc

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(t) &= (F^{-1})'(t) \times \gamma'(F^{-1}(t)) \\ &= \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} \times \gamma'(F^{-1}(t)) \\ &= \frac{\gamma'(F^{-1}(t))}{|\gamma'(F^{-1}(t))|}\end{aligned}$$

D'où,  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$  pour tout  $t \in [0, L]$ .

Donc on a bien un lacet

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [0, L] &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \tilde{\gamma}(x)\end{aligned}$$

injectif,  $C^1$ , de période  $L$  et tel que  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1, \forall t \in [0, L]$ .

Montrons que  $\tilde{\gamma}(0) = 0$

- Si  $\tilde{\gamma}(0) = 0$ , tout est bon.
- Sinon : on pose l'application

$$\begin{aligned}g_1 : [0, L] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto g_1(t) = \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)\end{aligned}$$

Donc  $g_1(0) = 0$ . De plus,  $g_1$  est  $C^1$ , injective et 1-périodique sur  $[0, L]$

Montrons que  $g_1'(0) = 1$

$g_1'(0)$  est bien définie puisque  $g_1$  est  $C^1$  sur  $[0, L]$  et

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, L], g_1'(t) &= \tilde{\gamma}'(t) \\ \text{donc } g_1'(0) &= \tilde{\gamma}'(0)\end{aligned}$$

Si l'on veut que  $\tilde{\gamma}'(0) = 1$ , alors il faut lui appliquer une rotation.

En effet,  $|\tilde{\gamma}'(0)| = 1$  par sa paramétrisation et donc

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(0) &= e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in [0, 2\pi[ \\ \theta &= \arg(\tilde{\gamma}'(0))\end{aligned}$$

Donc, en posant, pour  $\theta \in [0, 2\pi[$  fixé,

$$\begin{aligned}g_\theta(t) &= e^{-i\theta} \times g_1(t) \\ &= e^{-i\theta} \times (\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0))\end{aligned}$$

Alors  $g_\theta$  est  $L$ -périodique,  $C^1$ , injective sur  $[0, L[$

$$\begin{aligned}g_\theta(0) &= 0 \\ g'_\theta(0) &= 1 \\ |g'_\theta(t)| &= 1, \forall t \in [0, L]\end{aligned}$$

Notre lacet  $\gamma$  reparamétrisé par  $\tilde{\gamma}$  puis transformé en  $g_\theta$  vérifie les conditions du théorème de Jordan pour les courbes de classe  $C^1$ .

Par le théorème de Jordan,  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  a deux composantes connexes. Or, nous avons montré que  $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{C}$  est connexe.  $h \circ \varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme donc, en particulier, un homéomorphisme. La connexité est un invariant topologique donc on aboutit à une contradiction.

Ainsi,

La sphère et le tore ne sont pas  $C^1$ -difféomorphes.

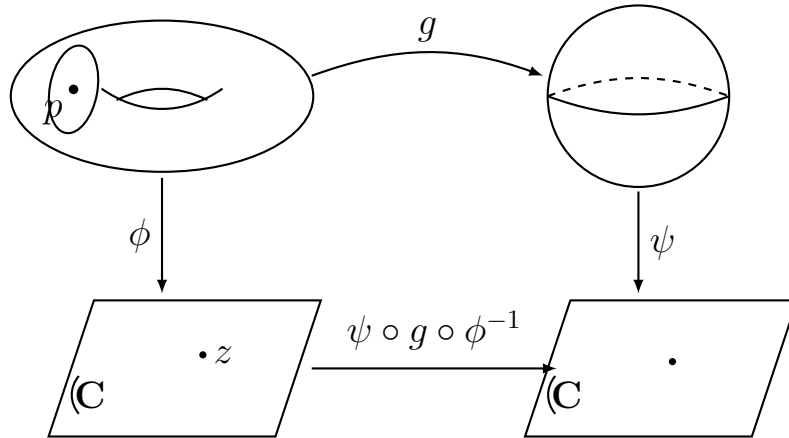


FIGURE 2 – Diagramme commutatif des variétés complexes.

## 5 Conclusion

Ainsi, nous avons vu à travers la preuve de notre théorème, que la sphère et le tore ne sont pas  $C^1$ -difféomorphes. D'autre part, la sphère est simplement connexe tandis que le tore l'est. Ceci montre que la simple connexité est un invariant topologique, nécessaire pour que le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann soit appliqué.

## Références

- [1] Louis DUPAIGNE. *Notes de cours d'analyse complexe*. Notes de cours.
- [2] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann : Retour sur un théorème centenaire*. ENS Éditions, 2010.
- [3] Gonnord et TOSEL. *Calcul différentiel*. Collection CAPES/Agrégation. Ellipses, 1998.

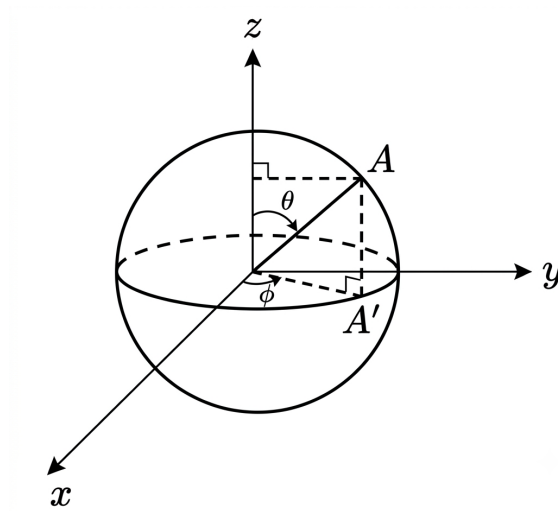


FIGURE 3 – Coordonnées sphériques

## 6 Annexes