

(X, d) espace métrique $x \in X, r > 0$

1. Montrer $B_f(x, r)$ est fermé

• On pose $U = X \setminus B_f(x, r) = B_f(x, r)^c$
 $= \bigcup_x B_f(x, r)$ complémentaire

$$U = \{z \in X \mid d(x, z) > r\}$$

On montre que U est ouvert (et donc $B_f(x, r)$ est fermée).

Il faut montrer que $\forall y \in U$, il existe $s > 0$

tel que $B(y, s) \subseteq U$. Soit $y \in U$
 donc $d(x, y) = r + \delta$ avec $\delta > 0$.

On pose $s = \delta/2$. Soit $z \in B(y, s)$,

on a $d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$



$$B_f(3r) \geq d(x, y) - d(y, z)$$

$$> r + \delta - s \underset{\delta/2}{\geq} r + \delta/2 > r$$

Donc $B(y, s) \subseteq U$ donc U est ouvert.

2. On montre

$$\overline{B(x, r)} \subseteq B_g(x, r) :$$

$B_g(x, r)$ est un fermé contenant $B(x, r)$
donc $\overline{B(x, r)} \subseteq B_g(x, r)$

On montre $B(x, r) \subseteq B_g(x, r)^o$
c'est le plus ~~petit~~ grand

ouvert contenu dans $B_f(x, r)$
 mais $B(x, r)$ se en ouvert contenu
 dans $B_f(x, r)$ donc

$$B(x, r) \subseteq B_f(x, r)^{\circ}$$

Remarque : $\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \in F}} F$

$$A^{\circ} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subseteq A}} U$$

3. X est (norme $\|\cdot\|$)

On sait $\overline{B(x, r)} \subseteq B_g(x, r)$

On veut montrer $B_g(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$ $\parallel$
et donc $\overline{B(x, r)} = B_g(x, r)$

Soit $v \in B_g(x, r)$, on veut trouver une suite (v_n) de vecteurs de $B(x, r)$ telle que $\lim v_n = v$.

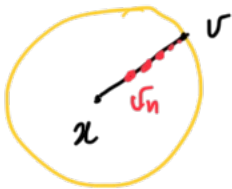
On pose $w = \underline{x} - v$ donc $\|w\| \leq r$

On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = v + \frac{1}{n} w$

$$\text{On a } \|x - v_n\| = \|x - v - \frac{1}{n} w\|$$

$$= \|w - \frac{1}{n} w\| = (1 - \frac{1}{n}) \|w\|$$

$$\leq (1 - \frac{1}{n}) r < r \quad \forall n \geq 1$$



donc $v_n \in B(x, r)$

or on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$

donc $v \in \overline{B(x, r)}$

Number of $B_f(x, r)^0 = B(x, r)$

4. X are distance discrete
" $\{x, y\}$

$$B(x, 1) = \{x\}$$

$$B_f(x, 1) = \{x, y\}$$

$$\overline{B(x, 1)} = \{x\}$$

$$B_f(x, 1)^0 = \{x, y\}$$

$$(\text{for } B_f(x, 1) = B(x, 2))$$

Overt

