

G groupe dv ordre 12 $12 = 2^2 \times 3$

1. Valeurs possibles pour n_2 et n_3

• On a $n_2 \mid 3$ et $n_2 \equiv 1 \pmod{2}$

d'où $n_2 = 1$ ou 3

• On a $n_3 \mid 4$ et $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$

d'où $n_3 = 1$ ou 4

2. Montrer G abélien si $n_2 = n_3 = 1$

$\Rightarrow$ Si G est abélien alors tous les sous-groupes

sont distingués et donc $n_2 = n_3 = 1$.

$\Leftarrow$ On suppose $n_2 = n_3 = 1$. Soit P le 2-Sylow
et Q le 3-Sylow et on a $PQ = G$

et $P \cap Q = \{e\}$ donc $G \cong P \times Q$

et P et Q sont abéliens

(Tout groupe d'ordre ≤ 5 est abélien)

(ordre 4: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

2.1/2.2 à faire (ou pas)

3. G non abélien

On suppose $n_3 \neq 1$. Montrons que $n_2 = 1$

On va compter les éléments d'ordre 1 ou 3 :

- ordre 1 : uniquement e : 1 élément
- ordre 3 : chaque 3. groupe de Sylow donne 2 éléments d'ordre 3, donc il y a

$4 \times 2 = 8$ éléments d'ordre 3.

Les éléments d'ordre 2 ou 4 sont au plus

$12 - 1 - 8 = 3$ donc il y a au

unique 2-Sylow (Note: chaque 2-Sylow

contient 3 éléments d'ordre 2 ou 4)

d'où $n_2 = 1$.

4. On suppose $n_3 = 4$.

Action de G sur les 3-Sylow par conj.

3-Sylow $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$

et par le th. de Sylow, $\forall g \in G$

$$g \cdot Q_i \stackrel{\text{def}}{=} g Q_i g^{-1} \leftarrow \text{3-Sylow}$$

d'où on a $G \xrightarrow{\Phi} S_4$ morphisme

$$g \mapsto \pi_g \quad \text{avec} \quad g \cdot Q_i = Q_{\pi_g(i)}$$

4.1 Soit φ un 3-Sylow, on considère

$$S_\varphi = \{g \in G \mid g \cdot \varphi = \varphi\}$$

Par définition de l'action $Q \in S_Q$

[Supposons $Q \neq S_Q$ alors
 $|Q| \mid |S_Q|$ donc $3 \mid |S_Q|$
et $|S_Q| > 3 \dots$]

On sait que $\text{card}(\underbrace{S_Q}_{\text{orbitale de } Q}) = \frac{|G|}{|S_Q|}$

mais l'action est transitive par le H .

de Sylow d'où $\text{card}(\Omega_Q) = 4$

et donc $|S_Q| = 3$ d'où $S_Q = G$.

4.2 Soit K le noyau de l'action, on a

$$K = \bigcap_{3\text{-Sylow } Q} S_Q = \bigcap_{i=1}^4 Q_i = \{e\}$$

puisque $Q_1 \cap Q_2 = \{e\}$

car $Q_1 \cap Q_2$ est un sous-groupe Q_i ,

donc son ordre est 1 ou 3

mais si c'est 3 alors $Q_1 \cap Q_2 = Q_1$

donc $Q_2 = Q_1$ faux

Donc l'action est fidèle et donc $G \leq \text{Im } \Phi$

Sous-groupe de S_n d'ordre 12 donc $\text{Im } \Phi = A_n$

donc $G \leq A_n$.

