

1. $H < G$ d'indice 2: montrer $H \triangleleft G$

Considérons $G/H = \{H, gH\}$ (car G fin)

car $\text{card}(G/H) = \frac{|G|}{|H|} = \text{indice de } H \text{ dans } G$

val. même pour G infini

et $H \setminus G = \{H, Hg'\}$

On a $gH = G \setminus H = Hg'$

Preuve : On va montrer que $\forall g \in G$,
 $gH = Hg$

- $g \in H$ alors $gH = H = Hg$
- $g \notin H$ alors $gH = G \setminus H = Hg$
car $gH \neq H$, $Hg \neq H$

d'où on a bien $gH = Hg$.

2. G groupe fini. Soit p le plus petit
premier diviseur $|G|$.

Soit $H < G$ avec $[G:H] = p = \frac{|G|}{|H|}$
 $[G:H] = p$
car (G/H)

On montre que $H \trianglelefteq G$

On fait agir G sur $X = G/H$
par l'action suivante pour $g \in G, x \in X$
 $g \cdot x = g g_0 H \quad (x = g_0 H)$

(montrer que c'est une action de groupe)

1. Montrer que cette action est transitive

Soient $x, y \in X$, on montre qu'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

On écrit $x = g_0 H$ et $y = g_1 H$

On pose $g = g_1 g_0^{-1} \in G$, on a

$$g \cdot x = g_1 g_0^{-1} g_0 H = g_1 H = y$$

2. Soit K le noyau de l'action.

Montrer que $K \subseteq H$.

Soit $k \in K$, donc $\forall x \in X, k \cdot x = x$

En particulier $x=H$ donne

$kH=H$ d'où $\forall h \in H, kh \in H$
($h=e$) donc $k \in H$ et on a bien $K \subseteq H$.

③ Montrer G/K iso. à un sous-groupe
de Sp_1 .

On écrit $G/K = X$
 $G/K = \{x_1, \dots, x_p\}$

Pour $g \in G$, on définit π_g par

$$g \cdot x_i = x_{\pi_g(i)} \text{ pour } i=1, \dots, p.$$

On vérifie facilement que $\pi_g \in S_p$

et que $\underline{\Phi} : G \rightarrow S_p$
 $\quad \quad \quad g \mapsto \pi_g$ est un morphisme

Remarque. Une action de groupe, ~~ici noté~~
 $\underline{\Phi}$, est un morphisme $G \rightarrow \text{Bij}(X)$

et $\underline{\text{Bij}(X)} \cong S_p$

et par définition le noyau de $\underline{\Phi}$ est K

Donc on a $G/K \cong \text{Im } \Phi < S_p$.

4. Montrer que $H = K$ et donc $H \triangleleft G$

On sait $|\text{Im } \Phi| \mid |S_p| = p!$ mais

aussi $|\text{Im } \Phi| \mid |G|$ car $|\text{Im } \Phi| = \frac{|G|}{|K|}$

Puisque p est le plus petit nombre premier divisant $|G|$, on a $|\text{Im } \Phi| = 1$ ou p

$p! = 1 \times 2 \times \dots \times p$ et les diviseurs premiers sont $\leq p$

Ce n'est pas égal à 1, car sinon
 $K = G$ et donc l'action triviale;

impossible car d'action est transitive

Donc $|K| = \frac{|G|}{p} = |H|$ puisque H est
d'indice p

d'où $K = H$ (puisque $K \subseteq H$).

