

1. Reconnaître S_n/A_n

S_n groupe symétrique sur n lettres

A_n sous-groupe alterné

$$A_n = \{ \pi \in S_n \mid \text{sign}(\pi) = 1 \}$$

$\text{sign}: S_n \rightarrow \{ \pm 1 \}$ morphisme

$$\text{sign}(\pi\sigma) = \text{sign}(\pi) \text{sign}(\sigma)$$

$$\text{Ker sign} = A_n$$

$\hookrightarrow$ par factorisation

$$S_n / \text{Ker sign} \simeq \text{Im sign}$$

$n \geq 2$

$$\text{d'où } S_n/A_n \simeq \{ \pm 1 \}$$

2. $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$?

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ n \in GL_n(\mathbb{R}) \mid n = n^{-1} \}$$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ n \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(n) = 1 \}$$

$\det: O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ morphisme

de noyau $SO_n(\mathbb{R})$

$$\text{d'où } O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Im } \det$$

Puisque $\det N = \det N^{-1} \Rightarrow \det(N) = \det(N)^{-1}$
 $\Rightarrow \det(N)^2 = 1 \Rightarrow \det(N) = \pm 1$

or $\det \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = -1$

d'où $O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}$

3. $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R})$?

$SL_n(\mathbb{R}) = \{N \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det N = 1\}$

On considère $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$
 morphisme de noyau $SL_n(\mathbb{R})$

d'où $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Im } \det$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

on a $\det \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \alpha$

d'où $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$

2. Montrons $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ carole Kijp.

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

$\mathbb{R}$ groupe additif et $\mathbb{Z}$ sous-groupe
(cyclique)

Trouver $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ morphisme
de noyau $\mathbb{Z}$ et surjectif : $\mathbb{R}/\ker f \simeq \text{Im } f$

$\mathbb{S}^1$ est un groupe multiplicatif

$$f: x \mapsto e^{2i\pi x}$$

$$\text{on a bien } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$\text{morphisme : } f(xy) = e^{2i\pi(xy)}$$

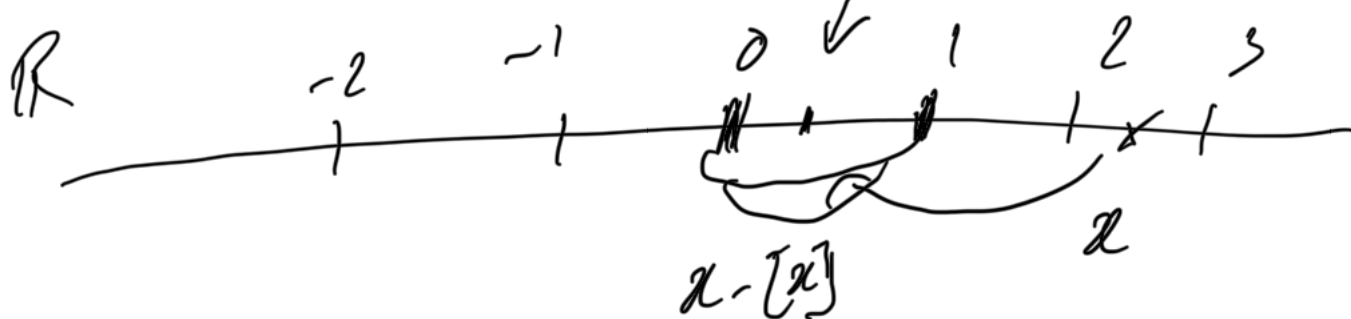
$$= e^{2i\pi x} \cdot e^{2i\pi y} = f(x)f(y)$$

surjectif et son noyau est $\mathbb{Z}$ car

$$\text{on a } e^{2i\pi x} = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$



$$3. \quad \mathbb{C}^* / \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^*$$

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ morphisme de noyau } \mathbb{S}^1$$

On prend $f: z \mapsto |z| \dots$

Sous-groupe caractéristique

$H \subseteq G$ ss $\forall f \in \text{Aut}(G), f(H) \subseteq H$

1. Soit $H \subseteq G$ alors $H \triangleleft G$

Soit $x \in G$, on doit montrer que $xHx^{-1} \subseteq H$

On définit $\tilde{\iota}_x: G \rightarrow G$ automorphisme
 $g \mapsto xgx^{-1}$ inversé $\tilde{\iota}_x^{-1}$

or donc $\lambda_x(H) \subset H$ puisque $H \subset G$
c'est-à-dire $xHx^{-1} \subset H$ donc $H \triangleleft G$.

2. $H \subset K \subset G \Rightarrow H \subset G$

Puisque $H \subset K$, $\forall f \in \text{Aut}(K)$, $f(H) \subset H$
or $K \subset G$, $\forall \phi \in \text{Aut}(G)$, $\phi(K) \subset K$.

Soit $\phi \in \text{Aut}(G)$, on doit montrer que
 $\phi(H) \subset H$. car $K \subset G$

On considère $f = \phi|_K : K \rightarrow K$

or on montre $f \in \text{Aut}(K)$

d'où $f(H) \subset H$ mais $f(H) = \phi(H)$
par restriction

donc on a bien $\phi(H) \subset H$.

3. $H \subset K \triangleleft G \Rightarrow H \triangleleft G$

Soit $x \in G$, on doit montrer $\lambda_x(H) \subset H$.

On pose $f = \lambda_x|_K$, on a

$f \in \text{Aut}(K)$ d'où $f(H) \subset H$
ou $f(H) = H$

4. Z centre de G

$f \in \text{Aut}(G)$ on montre: $f(Z) \subseteq Z$

Soit $z \in Z$, on doit montrer $f(z) \in Z$.

Soit $g \in G$, on calcule $f(z)g$?

Puisque $f \in \text{Aut}(G)$, elle est inversible

On pose $y = f^{-1}(g)$ on a encore $f(y) = g$

d'où $f(z)g = f(z)f(y) = f(zy)$

$= f(yz)$ car $z \in Z$

$= f(y)f(z) = g f(z)$

d'où $f(z) \in Z$ ou $f(z) \subset Z$
c'est-à-dire $Z \subset G$.

1. Soit $x \in G$ on note

$$\hat{\iota}_x : G \rightarrow G \quad \text{automorphisme intérieur}$$
$$g \mapsto xgx^{-1}$$

On montre

$$\hat{\iota}_x \circ \hat{\iota}_y = \hat{\iota}_{xy}$$

$$\phi : G \rightarrow \text{Int}(G)$$
$$x \mapsto \hat{\iota}_x$$

morphisme
de groupes
(surjectif)

de noyau $Z(G)$

$$\text{En effet } x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow \hat{\iota}_x = \text{Id}_G$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in G, \hat{\iota}_x(g) = g$$

$$\Leftrightarrow \forall g \in G, xgx^{-1} = g \Leftrightarrow x \in Z(G)$$
$$\uparrow$$
$$xg = gx$$

Done

$$G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$$

