

Soit p premier et soit G un p -groupe
donc $|G| = p^k$ avec $k \geq 1$.

• $k=1$ th: G est cyclique d'ordre p
($G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

Preuve: Soit $g \in G$ avec $g \neq e$ (g existe car $p \geq 2$)
alors l'ordre de g est p . En effet, c'est un
diviseur de p différent de 1 et p premier.

Donc G est cyclique engendré par g .

1. On montre que $Z(G) \neq \{e\}$

1.1 X fini avec une action de G

On note $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$.

Montrer $\text{card } X \equiv \text{card } X^G \pmod{p}$.

Soit $x \in X$, on a $x \in X^G \Leftrightarrow \Omega x = \{x\}$

$\Leftrightarrow \text{card } \Omega x = 1$

On a $\text{card}(X) = \sum_{\Omega \in X/G} \text{card}(\Omega)$

$$= \sum_{\substack{\Omega \in X/G \\ \text{card } \Omega = 1}} 1 + \sum_{\substack{\Omega \in X/G \\ \text{card } \Omega > 1}} \text{card } \Omega$$

Soit $\Omega \in X/G$ avec $\text{card } \Omega > 1$.

Puisque $|\Omega| \mid |G| = p^k$, on a

$|\Omega| = p^s$ avec $s > 1$ d'où $|\Omega| \equiv 0 \pmod{p}$

Donc $\text{card}(x) \equiv \sum_{\substack{\Omega \in X/G \\ \text{card } \Omega = 1}} 1 \pmod{p}$

$\left[\begin{array}{l} \{ \Omega \in X/G, \text{card } \Omega = 1 \} \text{ est en bijection} \\ \text{avec } X^G \text{ donc } \text{card}(X) \equiv \text{card}(X^G) \pmod{p}. \end{array} \right.$

1.2 On fait agir G sur lui-même ($X=G$)
 par, pour $g \in G, x \in G, g \cdot x = g x g^{-1}$
Conjugaison

On vérifie que c'est bien une action de groupe
 en $x \in G^G$ si $\forall g \in G, g \cdot x = x$
 si $\forall g \in G, g x g^{-1} = x$

$$\text{si } \forall g \in G, gx = xg$$

$$\text{si } x \in Z(G)$$

Par 1.1 on a $\text{card}(G) \equiv \text{card}(Z(G)) \pmod{p}$

mais $\text{card}(G) \equiv 0 \pmod{p}$ d'où

$$p \mid |Z(G)| \text{ donc } |Z(G)| \geq p \geq 2$$

$$\text{d'où } Z(G) \neq \{e\}$$

2. G groupe fini avec $G/Z(G)$ cyclique

Montrer G abélien

Soit $g \in G$ alors $G/Z(G) = \langle \bar{g} \rangle$

En particulier, $G = \{ Z(G), gZ(G), g^2Z(G), \dots \}$

Soient $x, y \in G$. On peut écrire

$$x = g^i z \text{ avec } z \in Z(G), i \in \mathbb{Z}$$

$$y = g^j w \text{ avec } w \in Z(G), j \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On calcule } xy = g^i z g^j w = g^i g^j zw$$

$\searrow$ car $z \in Z(G)$

$$\begin{aligned}
 &= g^{i+j} zw = g^j \underset{\substack{\text{car } z \in Z(G)}}{g^i zw} = g^j \underset{\substack{\text{car } w \in Z(G)}}{g^i w} z \\
 &= g^j w g^i z
 \end{aligned}$$

$= yz$ donc G est abélien

On suppose que G est d'ordre p^2

Alors on montre que G est abélien

On considère $G/Z(G)$, son ordre est
1 ou p

puisque $|G/Z(G)| = \frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{|Z(G)|} = 1$

Si $|Z(G)| = 1$, alors $G = Z(G)$ abélien

Si $|Z(G)| = p$, alors $G/Z(G)$ est cyclique

et donc G est abélien

(en fait, ce cas n'est pas possible)

Un groupe d'ordre p^2 est abélien

