

Soit G d'ordre n

$G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$ on numérote
les éléments

On considère $\phi: G \rightarrow S_n$

$$g \mapsto \phi(g) = \pi_g \quad \phi$$

avec $\pi_g(i) = j$ où
 $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$g g_i = g_j$$

① bien définie
(π_g est une
bijection et on note
 $\pi_{g^{-1}}$)

② ϕ est un morphisme (exo)

③ ϕ est injective :

Soit $g \in G$ avec $g \in \ker \phi \Leftrightarrow \phi(g) = e$

$$\Leftrightarrow \forall i, \pi_g(i) = i \Leftrightarrow \boxed{\forall i, \underbrace{gg^{-1}}_{g=e} = g^{-1}i}$$

donc $\ker \phi = \{e\}$ et ϕ injective

Donc $G \simeq \text{Im } \phi < S_n$

Remarque : On a en fait que $\pi \in \text{Im } \phi$
avec $\pi \neq \text{Id}$ alors $\forall i, \pi(i) \neq i$

(si on $gg_i = g_i \Rightarrow g = e$ contradiction)

$$\text{ou } \pi = \pi g$$

Remarque : On a une action de groupe ici
de G sur lui-même

