

$(E, \|\cdot\|)$ e.v.n. , $A, B \subseteq E$ non vides

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

1. Montrer A ouvert $\Rightarrow A+B$ ouvert

Soit $z \in A+B$, on écrit $z = a+b$

avec $a \in A, b \in B$. Comme A est

ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Soit $w \in B(z, r)$, on a

$$\|w - z\| = \|w - (a+b)\| = \|(w-b) - a\| < r$$

d'où $w-b \in A$ $\xrightarrow{w-b} w-b \in B(a,r)$

et ainsi $w \in A+B$ d'où

$B(z,r) \subseteq A+B$ et $A+B$ est ouvert.

Autre preuve : On a

$$A+B = \bigcup_{b \in B} A+b$$

ouverts
car A ouvert

et une union d'ouverts est elle-même ouverte.

2. A compact et B fermé $\Rightarrow A+B$ fermé

Soit (z_n) une suite convergente d'éléments de $A+B$ de limite z . On doit montrer $z \in A+B$. On écrit $z_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$.

Comme A est compact, il existe une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ convergente vers $a \in A$.

Mais alors $b_{\phi(n)} = z_{\phi(n)} - a_{\phi(n)} \rightarrow z - a$

Comme B est fermé, on a $z - a \in B$

donc $z \in A+B$

Conclusion : $A+B$ est fermé

3. Dans $\mathbb{R}^2$:

$$C = \{ (x, y) \mid xy = 1 \}$$

$$D = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Montrer C et D fermés mais pas $C+D$

La fonction $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue
 $(x, y) \mapsto xy$

et $C = f^{-1}(\{1\})$ donc C est fermé
 $\uparrow$
fermé

La fonction $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $(x, y) \mapsto x$

et $D = g^{-1}(\{0\})$ donc D est fermé
 $\uparrow$
fermé

On montre que $C + D$ n'est pas fermé.

① On montre que $C + D = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$

$$\bullet C + D \subseteq \{(x, y) \mid x \neq 0\}$$

↑ ↖ Coord. $x = 0$ ✓
Coord. $x \neq 0$

$$\bullet \{(x, y) \mid x \neq 0\} \subseteq C + D. \text{ Soit } (x, y) \text{ avec } x \neq 0$$

$$\text{On écrit } (x, y) = \underbrace{(x, \frac{1}{x})}_C + \underbrace{(0, y - \frac{1}{x})}_D$$

donc on a l'inclusion inverse et

$$C + D = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$$

On considère la suite $z_n = (\frac{1}{n}, 0)$ pour $n \geq 1$

on a $\forall n \geq 1, z_n \in C + D$

et $\lim z_n = (0, 0) \notin C + D$

donc $C + D$ n'est pas fermé

