

Calcul de normes subordonnées

1. $\phi : \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(u) = \int_0^1 x \cdot u(x) dx$$

Calculer $\|\phi\|_{\infty, \text{X}}$ ← Normes sur l'espace de départ et d'arrivée

puis, $\|\phi\|_2 \leftarrow$ norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$

Méthode :

- ① Trouver un bon majorant
- ② Montrer que c'est la norme

$$\textcircled{1} \left[\text{On a } \|\phi\|_{\infty} = \sup_{\|u\|_{\infty} \leq 1} |\phi(u)| \right]$$

On a $\|\phi\|_{\infty}$ est le minimum de $n > 0$
 tels que $\forall u, |\phi(u)| \leq n \|u\|_{\infty}$

trouver un n qui vérifie

$$\begin{aligned} \text{On a } |\phi(u)| &= \left| \int_0^1 x u(x) dx \right| \leq x \|u\|_{\infty} \\ &\leq \int_0^1 |x u(x)| dx \end{aligned}$$

$$\leq \|u\|_{\infty} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \|u\|_{\infty}$$

$$\text{done } \|\phi\|_{\infty} \leq \frac{1}{2}$$

② On prend $u = \frac{1}{2}$ (constante)

$$\text{and } |\phi(u)| = \left| \int_0^1 \frac{x}{2} dx \right| = \frac{1}{4}$$

$$\text{or } \|u\|_{\infty} = \frac{1}{2} \text{ done}$$

$$|\phi(u)| = \frac{1}{2} \|u\|_{\infty} \text{ done } \|\phi\|_{\infty} \geq \frac{1}{2}$$

Conclusion: $\|\phi\| = \frac{1}{2}$

On calcule $\overline{\|\phi\|_2}$

$$|\phi(u)| = \left| \int_0^1 x u(x) dx \right| \leq \int_0^1 x |u(x)| dx$$
$$\left(\|u\| = \int_0^1 |u(x)| dx \right) \leq \|u\|,$$

$$\text{donc } \|\phi\|_2 \leq 1.$$

- $\mu = a$ (constant) ($a \neq 0$)
 $|\phi(\mu)| = \frac{1}{2}a \quad \|\mu\|_1 = a \quad \left(\frac{1}{2}\right)$

- $\mu = x$
 $|\phi(\mu)| = \left| \int_0^1 x^2 dx \right| = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)$

$$\|\mu\|_1 = \left| \int_0^1 x dx \right| = \frac{1}{2}$$

- $\mu = x^n$
 $|\phi(\mu)| = \left| \int_0^1 x^{n+1} dx \right| = \frac{1}{n+1}$

$$\|u\|_1 = \left| \int_0^1 x^n dx \right| = \frac{1}{n+1}$$

d'où $\frac{n}{n+1} \leq \|\phi\|_2$

$$\left[\|\phi\|_1 = \sup_{n \neq 0} \frac{|\phi(n)|}{\|u\|_1} \right] \quad \text{Comme } \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

d'où $\|\phi\|_2 = 1$

$$2. \quad \underline{\Psi} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto P'(0)$$

$$\|\Psi\| \text{ pour } \|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$$

On considère la suite $P_n(x) = (x-1)^n$ $n \geq 1$

$$\text{On a } \|P_n\| = \sup_{x \in [0,1]} |(x-1)^n| = 1$$

$$\text{ex } |\underline{\Psi}(P)| = |n(0, -1)^{n-1}| = n$$

$$\text{donc } \forall n, \|\underline{\Psi}\| \geq n$$

La norme subordonnée n'existe pas !
 C'est normal car $\underline{\Psi}$ n'est pas continue

$$\underline{\Psi}(a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d) = a_1$$

