

d distance usuelle sur $\mathbb{R}$:

$$x, y \in \mathbb{R}: d(x, y) = |x - y|$$

On pose $d_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_1(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2; \pi/2[$ bijective

(1) Montrer que d_1 est distance

- d_1 est symétrique

- $d_1(x, x) = 0$ ✓

On suppose $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\arctan x = \arctan y$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\phi = \arctan$$

car arctan est bij. (inj.)

$$\bullet d_1(x, z) = |\phi(x) - \phi(z)|$$

$$= |\phi(x) - \phi(y) + \phi(y) - \phi(z)|$$

$$\leq |\phi(x) - \phi(y)| + |\phi(y) - \phi(z)|$$

$$\leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$$

2. Décrire $B(1, \pi/4)$ pour d_1

On a

$$x \in B(1, \pi/4) \Leftrightarrow d_1(1, x) < \pi/4$$

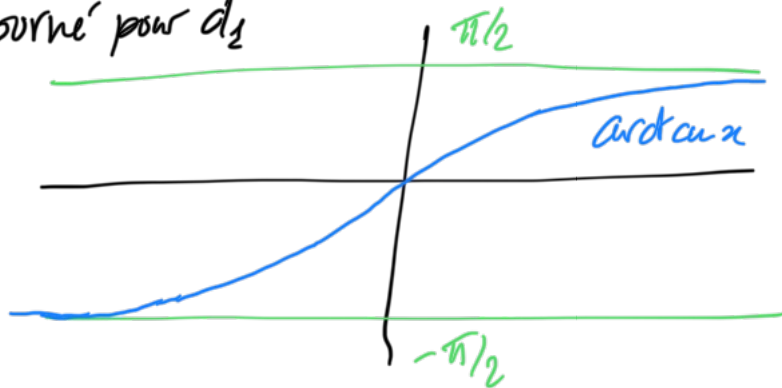
$$\Leftrightarrow \underbrace{|\arctan 1 - \arctan x|}_{\pi/4} < \pi/4$$

$$\Leftrightarrow 0 < \arctan x < \pi/2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x$$

$B(1, \pi/4) = \mathbb{R}^+_{*}$
non borné pour d_1

borne pour d_1



3. (x_n) suite réelle et $x \in \mathbb{R}$.

Montrer $x_n \xrightarrow{d} x$ si et seulement si $x_n \xrightarrow{d_1} x$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $x_n \xrightarrow{d} x$
puisque $\arctan$ est continue, on a
 $\arctan(x_n) \xrightarrow{d} \arctan(x)$

donc $x_n \rightarrow x$ pour d_1

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x_n \xrightarrow{d_1} x$
c'est-à-dire $\arctan(x_n) \xrightarrow{d} \arctan(x)$
On applique la fonction $\tan$ (continue)

$$\text{d'où } \tan(\underbrace{\arctan(x_n)}_n) \xrightarrow{d} \tan(\underbrace{\arctan(x)}_x)$$

(4) On peut montrer que $d_1 \leq d$
(par accroissement fini).

On montre qu'il n'existe pas de $\eta > 0$
tel que $d \leq \eta d_1$ et donc d et
 d_1 ne sont pas Lips-équivalents

~~On considère~~, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(n, n+1) = 1 \text{ mais}$$

$$d_1(n, n+1) = \arctan(n+1) - \arctan n$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc R ne peut pas exister.

Autre preuve : d n'est pas bornée
mais d_1 est bornée par π

Conclusion : d , $er d$ ne sont pas
lips. équivalents.

On montre que les fermés pour d
sont exactement les fermés pour d_1 ,
et donc d et d_1 sont topo. équivalents.

Rappel : F est fermé (pour d) ssi
 $\forall (x_n)$ suite de pts de F convergente,
on a $\lim x_n \in F$ pour d

mais c'est la même suite pour d_1
si F est fermé pour d_1 (par 3)

