

$$E = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$$

$$A = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \left(\int_0^1 |f(x)|^1 dx \right)^{1/1}$$

① A fermé dans E

Soit (f_n) une suite convergente de fonctions dans A de limite f . On montre que $f \in A$.

On a $\forall n, f_n(0) = 0$ puisque $f_n \in A$

Remarque : Soit $a \in [0; 1]$, alors l'application

$$\begin{cases} T_a: E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(a) \end{cases} \quad \text{est continue pour } \|\cdot\|_\infty$$

En particulier, $\lim_n T_0(f_n) = T_0(\lim_n f_n)$
 $= T_0(f) = f(0)$

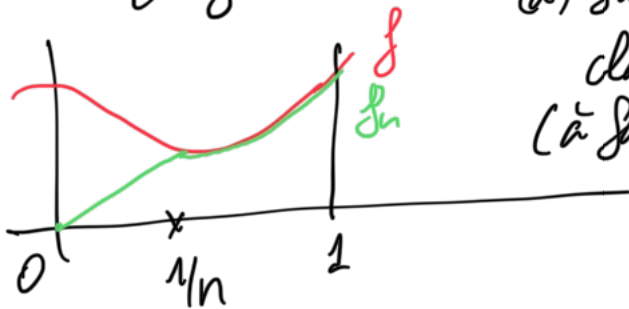
$$\begin{aligned} \text{m.a)} \quad \lim_n T_0(f_n) &= \lim_n 0 \quad (\text{car } f_n \in A) \\ &= 0 \quad \text{donc } f(0) = 0 \\ &\quad \text{et } f \in A. \end{aligned}$$

2. Soit $f \in E$. Pour $n \geq 1$,

$$f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1/n)nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) $f_n \in A$
clair
(à faire)



(b) Seien $n \geq 1$, monitren

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n} \|f\|_\infty$$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \int_0^{1/n} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{1/n}^1 |f_n(x) - f(x)| dx$$

$\underbrace{f_n(x)}_{f(1/n)nx} - f(x)$

$$\leq |f(\frac{1}{n})| \cdot n \int_0^{\frac{1}{n}} x \, dx + \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x)| \, dx \leq \|f\|_\infty$$

$$\leq \underbrace{|f(\frac{1}{n})|}_{\leq \|f\|_\infty} \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \|f\|_\infty$$

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n} \underline{\underline{\|f\|_\infty}}$$

$f_n \rightarrow f$ pour $\|\cdot\|_1$

③ Montrer A dense dans E , (pour $\|\cdot\|$.)

il faut montrer que $\bar{A} = E$ ou encore
pour tout $f \in E$, il existe (f_n) d'éléments
de A qui converge pour la norme $\|\cdot\|$,
vers f . On prend la suite (f_n) de la
question 2.

Q. Est-ce que A est dense dans E pour
 $\|\cdot\|_\infty$? sinon $A \neq E$ (car E est fermé)

ce qui est faux

4. Calculer A^0 par $\|\cdot\|_\infty$

On a $f \in A^0$ si $\exists r > 0$ tel que

$$B_\infty(f, r) \subseteq A \quad (B_\infty \text{ boule ouverte pour } \|\cdot\|_\infty)$$

$$B_\infty(f, r) = \{g \in E \mid \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < r\}$$

On montre que: $\forall r > 0$, il existe
 $g \in B_\infty(f, r)$ tel que $g \notin A$

On prend g définie par $g(x) = f(x) + r/2$

Alors $\forall x, |f(x) - g(x)| = r/2 < r$

d'où $g \in B_\infty(f, r)$ et

$$g(0) = f(0) + r/2 = r/2 \neq 0$$

d'où $g \notin A$

Conclusion: $A^0 = \emptyset$ (pour $\|\cdot\|_\infty$)

Même question pour $\|\cdot\|_2$:

" On remplace B_∞ à B_2 "

avec $B_1(f, r) = \{g \in E \mid \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot dx < r\}$

On montre que: $\forall r > 0$, il existe $g \in E$

avec $g \in B_1(f, r)$ et $g \notin A$

($g(x) = f(x) + t/2$ convient également)

donc $A^0 = \emptyset$ (pour 11.12)

