Topologie des espaces métriques

1. Espaces métriques
2. Fonctions continues
3. Compacité
4. Connexité
5. Complétude

§1.1 Topologie – Espaces métriques

Définition

Une distance sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
2. (symétrie) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(X, d) est un espace métrique

Définition

Une norme sur un espace vectoriel E (sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) est une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

1. (séparation) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$
2. (homogénéité) $\forall x \in E$, $\forall \lambda$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (evn)

$$\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{|-1|}} \cdot \|y-x\|$$

Résultat. Soit (X, d) espace métrique,

$$\boxed{\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)}$$

Théorème

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Alors $d(x,y) = \|x - y\|$ est une distance sur E

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ avec la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. La distance discrète sur tout ensemble X

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition

Deux distances d_1 et d_2 sur X sont Lipschitz-équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que

$m\, d_2 \leq d_1(x,y) \leq M\, d_2$

$$\forall x, y \in X, \quad m\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y)$$

Définition

Soit (X, d) espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on pose

parfois $\overline{B}$

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{(boule ouverte)}$$
$$B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad \text{(boule fermée)}$$

Une partie A de X est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall a, a' \in A$, $d(a, a') \leq M$, c'est équivalent à demander que A soit contenue dans une boule. Pour $A \subseteq X$, une partie bornée, on définit son diamètre par

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

Proposition

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques. Alors on peut définir les deux distances suivantes sur $X \times Y$

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

La distance d_∞ est la distance produit

Résultat. Ces deux distances sont Lipschitz-équivalentes

Définition

Une partie A d'un espace métrique (X, d) est un ouvert si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

Résultat. Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.

F fermé ssi $\exists U$ ouvert avec $X \setminus U = F$

Théorème

La famille des ouverts de (X, d) vérifie les propriétés suivantes :

1. *Toute union (arbitraire) d'ouverts est un ouvert*
2. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert*

(Un énoncé équivalent en découle pour les fermés)

Définition

La topologie d'un espace métrique (X, d) est l'ensemble des ouverts de X. Si A est une partie de X, la topologie induite est celle donnée par la restriction de d à $A \times A$.

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, la topologie produit de $X \times Y$ est celle donnée par la distance d_∞ (max. entre d_X et d_Y)

Définition

Deux distances sur X sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie.

Résultat. Deux distances Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

$d(x,y) = |x-y|$ $\quad$ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple

Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle et la distance discrète ne sont pas topologiquement équivalentes : le singleton $\{0\}$ est ouvert pour la distance discrète, mais pas pour la distance usuelle.

Définition

Une base de la topologie de (X, d) est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X telles que : tout élément de $\mathcal{B}$ est ouvert et tout ouvert (non vide) de X est union (arbitraire) d'éléments de $\mathcal{B}$

Résultat. Les boules ouvertes forment une base de la topologie de (X, d)

↳ U ouvert : pour $x \in U$, il existe $r(x) > 0$ tel que $B(x, r(x)) \subseteq U$. On pose $\bigcup_{x \in U} B(x, r(x)) \subseteq U$ à montrer

Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit que (x_n) converge vers $\ell \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \ d(x_n, \ell) \leq \epsilon$$

Résultat. La limite, si elle existe, est unique ← à montrer

Définition

Une suite extraite (on dit aussi sous-suite) d'une suite (x_n) d'éléments de X est une suite de la forme $(x_{f(n)})$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (et donc $\forall n, \ f(n) \geq n$).

$f(0) \geq 0$
$f(1) > f(0) \geq 0 \ldots$

Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit que $x \in X$ est valeur d'adhérence de (x_n) si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \geq 0$, $\exists n \geq N$ avec $x_n \in B(x, \epsilon)$. C'est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge vers x.

Théorème

Une partie A de l'espace métrique X est fermée ssi pour toute suite (x_n) convergente d'éléments de A, la limite est dans A

Remarque. Par passage au complémentaire, on en déduit une caractérisation analogue des ouverts par les suites.

$\mathring{A}$

Définition

Soit A une partie de l'espace métrique X. L'intérieur de A, noté A°, est le plus grand ouvert contenu dans A. L'adhérence de A, notée $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. La partie A est dense dans X si $\bar{A} = X$. La frontière de A, notée ∂A, est $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

Un espace métrique est séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

Résultat. On a $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$; $A^\circ = A$ ssi A est ouvert ; $\bar{A} = A$ ssi A est fermé.

ouvert fermée

Théorème

On a $x \in \bar{A}$ ssi $\forall U$ ouvert contenant x, $U \cap A \neq \emptyset$ ssi il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x

à montrer

Boules ouvertes, boules fermées

Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et r un réel strictement positif. On note $B(x, r)$ (resp. $B_f(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

1. Montrer que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de X.
2. Montrer que l'adhérence de $B(x, r)$ est incluse dans $B_f(x, r)$ et que l'intérieur de $B_f(x, r)$ contient $B(x, r)$.
3. On suppose dans cette question que X est un espace vectoriel normé, muni d'une norme $\| \ \|$. Montrer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
4. Donner un exemple d'un espace métrique (X, d) pour lequel les résultats de la question 3. sont faux.

Définition

Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et la norme $\|\cdot\|_\infty$ par $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

Résultat. L'inégalité triangulaire pour ces normes est l'inégalité de Minkowski

Théorème

Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe $m, M > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad m \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M \|x\|_p$$

et donc les distances correspondantes sont Lipschitz-équivalentes

Résultat. Faux en dimension infinie : sur $\ell^2(\mathbb{R})$, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$, mais les deux normes ne sont pas équivalentes (prendre $x_k(n) = 1$ si $n \leq k$, 0 sinon)

Normes sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On rappelle la définition des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Soit $f \in E$. On définit pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(1/n)\,nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in A$.
   2.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. Montrer que A est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Déterminer l'intérieur de A pour $\|\cdot\|_\infty$ puis pour $\|\cdot\|_1$.

§1.2 Fonctions continues

Définition

Une fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x' \in X,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

f est continue sur $A \subseteq X$ si f est continue en x pour tout $x \in A$

f est uniformément continue sur $A \subseteq X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in A,\ d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Remarque

Définition de continuité : $\delta = \delta_{x,\epsilon}$
Définition de continuité uniforme : $\delta = \delta_\epsilon$

Définition

Soit $K > 0$. Une fonction $f : X \to Y$ est K-lipschitzienne si

$$\forall x, x' \in X,\ d_Y(f(x), f(x')) \leq K\, d_X(x, x')$$

Résultat. Lipschitzienne $\implies$ uniformément continue $\implies$ continue

Théorème (Autre caractérisation de la continuité)

Soit $f : X \to Y$.

- *f est continue en $x \in X$ ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de X de limite x, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$ (caractérisation séquentielle)*
- *f est continue sur X ssi pour tout ouvert U de Y, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de X (caractérisation topologique)*
  Remarque. Vérifier pour U dans une base d'ouverts de Y est suffisant

Résultat. La composée, la somme, la multiplication de fonctions continues est continue

Résultat. Deux fonctions continues qui coïncident sur un ensemble dense sont égales

Théorème

Soit $f : X \to Y \times Z$ (avec la distance d_∞). On note $f = (f_Y, f_Z)$. Alors f est continue ssi f_Y et f_Z sont continues

Définition

Soient $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$ et $b \in Y$. On dit que f tend vers b quand x tend vers a ou la limite de f en a est b, noté $\lim_{x \to a} f(x) = b$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,\ 0 < d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), b) < \epsilon$$

Résultat. On a $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ssi $\lim_n f(x_n) = b$ pour toute suite (x_n) de limite a avec $x_n \neq a\ \forall n$

Résultat. f est continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions de X vers Y et soit $f : X \to Y$.

- (f_n) converge simplement vers f si $\forall x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$
- (f_n) converge uniformément vers f si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall x \in X, \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

Résultat. Une limite uniforme de fonctions continues est continue

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux evn. Alors f est continue ssi f est continue en 0 ssi f est lipschitzienne ssi $\exists M > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Dans ce cas, le plus petit M qui convient est la norme subordonnée de f, notée $|||f|||$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (= ensemble des applications linéaires continues), on a

- $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq |||f||| \cdot \|x\|_E$
- $$|||f||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F$$
- *Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $|||g \circ f||| \leq |||g||| \, |||f|||$*

Résultat. $\mathcal{L}(E, F)$ avec la norme $|||\cdot|||$ est un evn

Une autre distance sur $\mathbb{R}$ (partiel 2025)

Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et soit $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $d_1(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Décrire la boule $B(1, \pi/4)$ relativement à d_1.
3. Démontrer que, pour toute suite réelle (x_n) et tout réel x, on a $x_n \to x$ pour d si et seulement si $x_n \to x$ pour d_1.
4. Les distances d et d_1 sont-elles Lipschitz-équivalentes ? Sont-elles topologiquement équivalentes ?

Calcul de normes d'applications linéaires.

1. On considère l'application linéaire $\phi : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx.$$

   Calculer la norme de ϕ pour $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

2. On considère l'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(P) = P'(0).$$

   Calculer la norme de ψ pour $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|$.

§1.3 Compacité

Définition

Soit (X, d) un espace métrique.

- Propriété de Borel-Lebesgue. Soient $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts de X tels que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ (recouvrement d'ouverts), il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$.
- Propriété de Bolzano-Weierstrass. Toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Théorème

Ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace métrique. Un espace avec ces propriétés est un espace compact

Résultat. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés

Résultat. (Lemme de Lebesgue) Soit X un espace compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de X. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists i \in I$ avec $B(x, r) \subseteq U_i$.

Ce lemme sert dans la preuve de l'équivalence entre Borel-Lebesgue et Bolzano-Weierstrass.

Proposition

- *Un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé*
- *Une intersection arbitraire de compacts est compacte*
- *Une union finie de compacts est compacte*
- *Un fermé d'un espace compact est compact*

Théorème

1. **Image d'un compact.** *Soit* $f : X \to Y$ *continue avec* X *compact. Alors* $f(X)$ *est compact.*
2. **Borne atteinte.** *Soit* X *compact et* $f : X \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* f *est bornée et elle atteint ses bornes. De plus,* f *est uniformément continue (aussi vrai si on remplace* $\mathbb{R}$ *par* Y *métrique).*
3. **Riesz.** *Soit* E *un evn. Alors,* E *est de dimension finie ssi* $B_f(0,1)$ *est compacte.*
4. **Produit de compacts.** *Le produit de deux espaces compacts avec la distance produit est un espace compact.*

Proposition

Soit $n \geq 1$*, alors toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *(resp. sur* $\mathbb{C}^n$*) sont équivalentes*

Somme de deux parties (examen 2024, partiel 2023)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soient A, B deux parties non vides de E. On note $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.

3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $D = \{0\} \times \mathbb{R}$. Montrer que C et D sont fermés, mais que $C + D$ ne l'est pas.

§1.4 Connexité

Définition

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est connexe si, pour tous ouverts U et V avec $X = U \cup V$ et $U \cap V = \emptyset$, on a $(U, V) = (X, \emptyset)$ ou $(\emptyset, X)$.

Proposition

- *X est connexe ssi les seuls ouverts-fermés sont X et $\emptyset$*
- *X est connexe ssi toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante*
- *L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe*
- *Une union (arbitraire) de connexes d'intersection non vide est connexe*
- *Soit $A \subseteq X$ connexe et $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ alors B connexe*
  En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe
- *Le produit de deux espaces connexes est connexe*

Théorème (Connexité dans $\mathbb{R}$)

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. En conséquence, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires)

Définition

Soit $x \in X$ espace métrique. La composante connexe $C(x)$ de x est la réunion des connexes de X contenant x. C'est le plus grand connexe contenant x. En particulier, $C(x)$ est fermé.

Théorème

Soient $x, y \in X$. Alors $C(x) = C(y)$ ou $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. En particulier, X est l'union (disjointe) de composantes connexes.

Définition

Un chemin reliant x à y avec $x, y \in X$ espace métrique est une application $\gamma : [0; 1] \to X$ continue avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
On dit que X est connexe par arcs si, $\forall x, y \in X$, il existe un chemin reliant x et y

Résultat. Connexe par arcs $\implies$ connexe

Résultat. L'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs

Définition

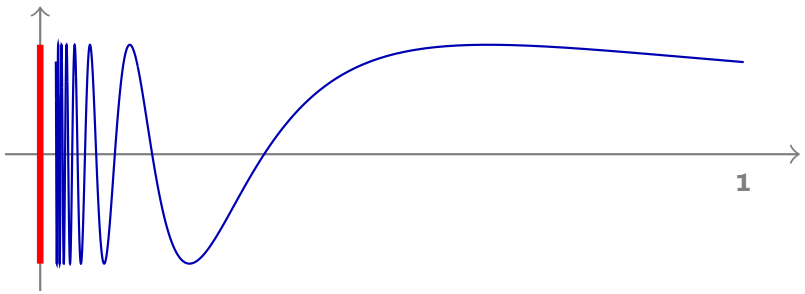
Un homéomorphisme entre deux espaces métriques $f : X \to Y$ est une bijection telle que f et f^{-1} sont continues. Dans ce cas, on dit que X et Y sont homéomorphes.

Application

Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes

Théorème

L'adhérence de l'ensemble $\left\{(t, \sin(1/t)) : t \in]0;1]\right\}$ est compacte, connexe mais pas connexe par arcs



§1.5 Complétude

Définition

Une suite (x_n) d'un espace métrique X est une suite de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n, m \geq N$, on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$
On dit que X est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente

Résultat. Suite convergente $\implies$ suite de Cauchy

Résultat. Suite de Cauchy avec une sous-suite convergente est convergente (même limite)

Théorème

- *Tout fermé d'un espace complet est complet*
- *Tout sous-espace complet est fermé*
- *Tout espace métrique compact est complet*
- *Tout evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet*

Définition

Un espace de Banach est un evn complet.

Exemples

1. Les evn de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
2. L'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ muni de $\|\cdot\|_p$, pour $p \in [1; +\infty]$ (Riesz-Fischer)
3. L'espace $\mathcal{C}_b(X, F)$ des fonctions continues bornées de X dans un Banach F, muni de $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$
4. L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de $|||\cdot|||$, si F est un Banach

Résultat. Dans un espace de Banach, toute série absolument convergente est convergente

Théorème (Prolongement des fonctions unif. continues)

Soient X et Y deux espaces métriques avec Y complet. Soient $S \subseteq X$, une partie dense de X, et $f : S \to Y$ une application uniformément continue. Alors, il existe un unique prolongement de f par continuité de X vers Y.

Rappel Les applications linéaires continues sont uniformément continues.

Théorème (Point fixe des applications contractantes)

Soit X un espace métrique. Une application $f : X \to X$ est contractante s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y).$$

Supposons que X est complet et $f : X \to X$ est contractante, alors elle admet un unique point fixe $x_* \in X$ avec $f(x_*) = x_*$. De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n) avec $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers x_* géométriquement, c'est-à-dire

$$\forall n \geq 0, \quad d(x_n, x_*) \leq \alpha^n\, d(x_0, x_*).$$

Résolution d'un système par le point fixe (TD 2024)

On considère le système

$$\begin{cases} 4x = \sin(x+y) \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que (x,y) soit solution du système si et seulement si (x,y) est un point fixe de f.
2. Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a-b|$ et $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a-b|$.
3. Montrer que f est contractante de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans lui-même.
4. Montrer que le système admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.