

Feuille d'exercices 3

Morphismes et quotients

Légende

[†] Exercice à connaître mais qui ne sera pas nécessairement traité en TD.

* Exercice plus difficile et non-obligatoire.

1 Premiers exemples de morphismes

Exercice 1. Pour chacune des applications suivantes, déterminer s'il s'agit d'un morphisme de groupes.

- (a[†]) $f: (\mathbf{Z}, +) \rightarrow (\mathbf{Z}, +)$ telle que $f(x) = 2x$;
- (b[†]) $g: (\mathbf{Z}, +) \rightarrow (\mathbf{Z}, +)$ telle que $g(x) = x - 1$;
- (c) $(\mathbf{R}_{>0}, \times) \rightarrow (\mathbf{R}, +)$, $x \mapsto \ln x$;
- (d) $h: (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbb{U}_2, \times)$ telle que $h(x) = e^{ix}$;
- (e) $\text{tr}: (M_n(\mathbf{R}), +) \rightarrow (\mathbf{R}, +)$, l'application qui à une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ associe sa trace;
- (f) $\text{tr}: (\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times) \rightarrow (\mathbf{R}, +)$;
- (g) $(\mathbb{U}_2, \times) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbf{R})$, $e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$;
- (h[†]) l'application $p: (G, *) \rightarrow (G, *)$ définie par $x \mapsto x^n$, où $(G, *)$ est un groupe abélien et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (Groupe général linéaire). Soit F un corps.

- (a) Considérons le sous-groupe $G \leq \text{GL}(2, F)$ défini par

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in F, ac \neq 0 \right\}.$$

Démontrer que l'application $\phi: G \rightarrow F^\times$ définie ci-dessous est un morphisme surjectif et calculer son noyau :

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = a$$

- (b) Montrer que le sous-groupe $G \leq \text{GL}(2, F)$ défini ci-dessous est isomorphe au groupe additif de F :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in F \right\}.$$

Exercice 3 ((Non)-Isomorphismes de groupes infinis). On a vu que les groupes $(\mathbf{R}, +)$ et $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$ sont isomorphes. Montrer que :

- (a[†]) $(\mathbf{R}, +) \not\cong (\mathbf{R}^*, \times)$.
- (b) $(\mathbf{C}, +) \not\cong (\mathbf{C}^*, \times)$.
- (c) $(\mathbf{Q}, +) \not\cong (\mathbf{Q}^{>0}, \times)$.
- (d) $(\mathbf{C}^*, \times) \cong (\mathbf{R}^{>0}, \times) \times (\mathbb{U}_2, \times)$.
- (e) $\text{SO}_2(\mathbf{R}) \cong (\mathbb{U}_2, \times)$;
- (f) $\text{SO}_2(\mathbf{C}) \cong (\mathbf{C}^*, \times)$;

2 Morphismes généraux

Exercice 4[†]. (a) Soient $\varphi: G \rightarrow H$ et $\psi: H \rightarrow K$ deux morphismes de groupes. Montrer que la composition $\psi \circ \varphi: G \rightarrow K$ est encore un morphisme.

(b) Montrer qu'un morphisme injectif $\varphi: G \rightarrow H$ est la même chose qu'un isomorphisme entre G et un sous-groupe de H .

Remarque. Un tel morphisme met en évidence une copie isomorphe de G dans H : on dit qu'il *plonge* G dans H . Ainsi, un morphisme injectif s'appelle aussi un *plongement*.

Exercice 5. Soit $(G, +)$ un groupe abélien.

(a) Montrer que l'application $\pi: G \times G \rightarrow G$, définie par $\pi(x, y) = x + y$ est un morphisme de groupes.

(b) Dans le cas $G = \mathbf{R}$, décrire les fibres de π (i.e. les ensembles $\pi^{-1}(\{z\})$) géométriquement.

(c[†]) Si G est fini et que n est un nombre naturel non nul premier avec $|G|$ alors montrer que pour tout $a \in G$ il existe $b \in G$ tel que $a = nb$.

Exercice 6 (Morphismes et parties génératrices). Soit $\pi: G \rightarrow H$ un morphisme surjectif et soit $S \subseteq G$ tel que $\langle S \rangle = G$. Montrer que $\langle \pi(S) \rangle = H$.

3 Sous-groupes distingués

Exercice 7 (Centre). (a) Montrer que $Z(G) \trianglelefteq G$.

(b) Plus généralement, montrer que si $H \leq Z(G)$ alors $H \trianglelefteq G$.

(c) Déterminer $Z(S_n)$ pour $n \geq 2$. Question similaire pour $GL_n(K)$ où K est un corps et $n \geq 2$.

Exercice 8. Soit G un groupe.

(a) Montrer qu'un sous-groupe H de G est distingué si et seulement $\forall x, y \in G, xy \in H$ implique que $yx \in H$.

(b) Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 de G est distingué.

(c) Soit $H \leq G$ un sous-groupe. On suppose que H est d'ordre n , et que c'est l'unique sous-groupe de G d'ordre n . Montrer que H est distingué dans G .

(d) Soient K et H deux sous-groupes distingués de G tels que $K \cap H = \{e\}$. Montrer que $kh = hk$ pour tout $k \in K$ et $h \in H$. Est-ce la même chose que dire que $KH = HK$?

(e) Soient $H, K \leq G$. Montrer que $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ n'implique pas nécessairement $K \trianglelefteq G$.

Indication : penser au groupe diédral D_8 ou au groupe alterné A_4 et à ses sous-groupes.

Exercice 9 (Le groupe quaternionique). Dans $G = GL(2, \mathbf{C})$, posons :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour ne pas confondre avec I , notons aussi la matrice identité I_2 par 1.

(a) Calculer leurs carrés, ainsi que les produits IJ, JK, KI .

(b) En déduire les produits JI, KJ, IK .

(c) Déduire que $\langle I, J \rangle = \{\pm 1, \pm I \pm J, \pm K\}$. Ce groupe s'appelle le *groupe quaternionique*, noté Q_8 .

(d) Dresser la liste des sous-groupes de Q_8 . Pour chacun, déterminer s'il est distingué ou non.

Exercice 10[†]. Montrer que si G est abélien alors tout sous-groupe de G est distingué.

Donner un exemple d'un groupe non-abélien dont tous les sous-groupes sont distingués.

Exercice 11. Soit $G = \text{GL}(2, \mathbf{Q})$ et soient

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{Z} \right\}, \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $gHg^{-1} \subseteq H$ mais que g ne normalise pas H .

Exercice 12 (Parties génératrices). Soit G un groupe, $N \leq G$. Soient $S \subseteq G$, $T \subseteq N$ tels que $G = \langle S \rangle$, $N = \langle T \rangle$.

- (a) Montrer que si pour tout $s \in S$, $sTs^{-1} \subseteq N$ et $s^{-1}Ts \subseteq N$, alors $N \trianglelefteq G$.
- (b) Si N est fini il suffit de demander que $sTs^{-1} \subseteq N$ pour tout $s \in S$.

4 Quotient

Exercice 13. Soit F un corps. Montrer que $\text{SL}(n, F) \trianglelefteq \text{GL}(n, F)$ et déterminer le type d'isomorphisme du quotient (*i.e.* déterminer un groupe G tel que $G \simeq \text{GL}(n, F) / \text{SL}(n, F)$).

Exercice 14[†]. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on note $\tau_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $x \mapsto ax + b$. On note $G = \{\tau_{ab} : (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$.

- (a) Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe. Est-il commutatif?
- (b) Montrer que $N = \{\tau_{1b} : b \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe distingué de G .
- (c) Montrer que $G/N \cong (\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 15. Trouver tous les sous-groupes distingués de D_8 et le type d'isomorphisme du quotient de D_8 par chacun d'entre eux. (*Indication* : D_8 a 10 sous-groupes distincts.)

Exercice 16 (Exemples de quotients abéliens). Soit G un groupe.

- (a) Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien.
- (b) Montrer que si A et B sont deux sous-groupes distingués de G tels que G/A et G/B sont abéliens, alors $G/A \cap B$ est abélien.

Exercice 17 (Application au calcul de $|G|$). Soit G un groupe fini tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$.

- (a) Rappeler pourquoi G est abélien.
- (b) Montrer que $|G|$, l'ordre de G , est une puissance de 2.
Indication : pour $x \in G \setminus \{e\}$, considérer le quotient $G/\langle x \rangle$.

Exercice 18. Montrer que $(\mathbf{Q}, +)$ n'a pas de sous-groupes propres d'indice fini.

5 Automorphismes intérieurs

Exercice 19 (Groupe d'automorphismes). Soit G un groupe. Soit $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G , muni de « $\circ$ », la loi de composition d'applications. Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe.

On pourrait le montrer ou bien directement, ou bien en montrant que $\text{Aut}(G) \leq S_G$.

On appelle $(\text{Aut}(G), \circ)$ le *groupe d'automorphismes* de G .

Exercice 20 (Morphisme de conjugaison). Soit G un groupe et $x, y \in G$. On appelle xyx^{-1} le *conjugué* de y par x . Pour $x \in G$ fixé, définissons $\varphi_x : G \rightarrow G$ par

$$\varphi_x(y) = xyx^{-1}.$$

Cette application est la *conjugaison par x* .

- (a) Montrer que pour tout $x \in G$, l'application $\varphi_x: G \rightarrow G$ est un morphisme.
- (b) Montrer que pour tout $x, y \in G$, on a $\varphi_x \circ \varphi_y = \varphi_{xy}$.
- (c) Montrer que $\varphi_e = \text{id}_G$.
- (d) En déduire que $\varphi_x \in \text{Aut}(G)$ pour tout $x \in G$.

Exercice 21 (Groupes des automorphismes intérieurs). Grâce à l'**Exercice 20**, on peut définir une application

$$\Phi: G \rightarrow \text{Aut}(G), \quad \Phi(x) = \varphi_x.$$

- (a) Montrer que Φ est un morphisme de groupes.
- (b) Montrer que $\ker \Phi = Z(G)$.
- (c) Soit $\psi \in \text{Aut}(G)$ et $x \in G$. Montrer que $\psi \circ \varphi_x \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(x)}$. En déduire que

$$\text{img} \Phi \trianglelefteq \text{Aut}(G).$$

(d[†]) Montrer que G est abélien si et seulement si Φ est le morphisme trivial.

Remarque. Un automorphisme de G qui peut s'écrire sous la forme φ_x s'appelle un automorphisme *intérieur*. L'ensemble des automorphismes intérieurs est notée $\text{Inn}(G)$:

$$\text{Inn}(G) = \{\varphi_x : x \in G\} = \text{img} \Phi.$$

Nous avons montré que $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$. Le groupe quotient $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ est noté $\text{Out}(G)$, et ses membres s'appellent des automorphismes *extérieurs* (bien que ce ne soient pas des automorphismes).

6 Exercices de synthèse

Exercice 22 (Groupe dérivé). Soit G un groupe. Soit G un groupe et $x, y \in G$. On appelle

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

le *commutateur* de x et y . Le sous-groupe engendré par tous les commutateurs, noté G' , s'appelle le *groupe dérivé* de G :

$$G' = \langle [x, y] : x, y \in G \rangle.$$

- (a[†]) Montrer que $[x, y] = e$ si et seulement si $xy = yx$.
- (b) Montrer que $G' \trianglelefteq G$.
- (c) Montrer que G/G' est abélien.
- (d^{*}) Montrer que si H est un groupe abélien quelconque et $\varphi: G \rightarrow H$ un morphisme, alors $G' \leq \ker \varphi$ et il existe un unique morphisme $\psi: G/G' \rightarrow H$ tel que $\psi \circ \pi_{G'} = \varphi$. Autrement dit, il existe un unique ψ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_{G'}} & G/G' \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & H \end{array}$$

Exercice 23 (Automorphismes de groupes cycliques). Nous proposons de calculer le groupe $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, pour $n \geq 2$. Pour cela, nous allons utiliser la structure d'anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Un membre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sera noté $\bar{k} = k + n\mathbf{Z}$, avec $k \in \mathbf{Z}$. Nous avons déjà (ou nous le montrerons en amont) que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet deux opérations, $+$ et $\cdot$, définies par

$$\bar{k} + \bar{\ell} = \overline{k + \ell}, \quad \bar{k} \cdot \bar{\ell} = \overline{k \cdot \ell}.$$

En particulier, ces deux opérations sont bien définies, et $+$ est simplement la loi du groupe quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

- (a) Montrer que la multiplication sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est associative, avec neutre $\bar{1}$.
- (b) Un élément $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est dit *inversible* s'il existe $y \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $xy = yx = \bar{1}$. L'ensemble des membres inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sera noté $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$. Montrer que $((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot)$ est un groupe.
- (c) Soit $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, et posons $\hat{\varphi} = \varphi(\bar{1}) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer que $\varphi(x) = x\hat{\varphi}$ tout $x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
- (d) Montrer que si $\varphi, \psi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, alors $\widehat{\varphi \circ \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$, et que $\widehat{\text{id}} = \bar{1}$.
- (e) En déduire que pour tout $\varphi \in \text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, $\hat{\varphi}$ est inversible, et que l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est un morphisme $\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +) \rightarrow ((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot)$.
- (f) Montrer que c'est un isomorphisme, d'où notre conclusion :

$$\text{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +) \cong ((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot).$$

Exercice 24[†]. Utilisant les mêmes idées que dans **Exercice 23**, montrer que $\text{Aut}(\mathbf{Z}, +) \cong (\mathbf{Z}^\times, \cdot) = (\{\pm 1\}, \cdot)$. Montrer de même que $\text{Aut}(\mathbf{Q}, +) \cong (\mathbf{Q}^\times, \cdot)$.