

Feuille d'exercices 2

Sous-groupes

Légende

- [†] Exercice à connaître mais qui ne sera pas nécessairement traité en TD.
- * Exercice plus difficile et non-obligatoire.

1 Premiers exemples

Exercice 1. Montrer que

- (a[†]) $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^\times, \cdot)$.
- (b[†]) $(\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.
- (c) $(n\mathbf{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ et de $(\mathbf{R}, +)$.

Pourquoi $(\mathbf{R}^{>0}, \cdot)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$?

Exercice 2 (Sous-groupes de $\mathbf{Z}$). (a) Démontrer qu'une partie $K \subseteq \mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$ si et seulement s'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $K = d\mathbf{Z}$. De surcroît, d est unique.

(b) Soit $a, b \in \mathbf{N}$. Vérifier que la partie

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \{ka + \ell b : k, \ell \in \mathbf{Z}\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}, +)$. Soit $c, d \in \mathbf{N}$ tels que

$$a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = c\mathbf{Z}, \quad a\mathbf{Z} \cap b\mathbf{Z} = d\mathbf{Z}.$$

Que peut-on dire de c et de d ?

Exercice 3 (Sous-groupes du groupe symétrique).

- (a) D'après le théorème de Lagrange, quels sont les ordres possibles des sous-groupes de S_3 ?
- (b) Dresser la liste de tous les sous-groupes de S_3 .
- (c) Montrer que l'ensemble H ci-dessous est un sous-groupe de S_4 :

$$H = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

2 Sous-groupes remarquables

Exercice 4 (Centralisateur et centre). Soit G un groupe et $x \in G$. Le *centralisateur de x dans G* , noté $C_G(x)$, est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec x , i.e.

$$C_G(x) = \{y \in G : xy = yx\}.$$

Le *centre* de G , noté $Z(G)$, est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tout $x \in G$, autrement dit il est défini par

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

- (a) Montrer que $C_G(x)$ et $Z(G)$ sont des sous-groupes de G et que $Z(G)$ est abélien.
- (b) Montrer que G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.
- (c) Soit $x \in G$.
 - (i) Montrer que $x \in Z(G)$ si et seulement si $C_G(x) = G$.
 - (ii[†]) Montrer que si G est non-trivial, alors $C_G(x)$ n'est jamais trivial.
- (d[†]) Soit G un groupe, $H \leq G$ et $K = C_G(H)$. Montrer que $H \leq C_G(K)$.

Exercice 5 (Centralisateurs dans le groupe symétrique). Soit $G = S_3$. Déterminer $C_G(\sigma)$ pour chaque $\sigma \in G$, ainsi que $Z(G)$. Pouvez-vous déterminer $Z(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 6 (Normalisateur). Soit G un groupe et $A \subseteq G$ une partie de G . Le *normalisateur de A dans G* , noté $N_G(A)$, est défini par

$$N_G(A) = \{x \in G : xAx^{-1} = A\}.$$

- (a) Montrer que le normalisateur $N_G(A)$ est un sous-groupe de G .
- (b) Montrer que si $H \leq G$, alors $H \leq N_G(H)$.

3 Généralités sur les sous-groupes

Exercice 7[†]. Montrer que la relation $H \leq G$ est un ordre partiel sur les groupes. Autrement dit, montrer que cette relation est :

- *Réflexive* : $G \leq G$;
- *Antisymétrique* : $H \leq G$ et $G \leq H$ implique $G = H$ (en tant que groupes!);
- *Transitive* : Si $K \leq H$ et $H \leq G$ alors $K \leq G$.

Exercice 8. Soient G un groupe et H un sous-ensemble fini non vide de G qui est stable par rapport à la loi de groupe de G . Montrer que $H \leq G$.

Exercice 9. Soient G un groupe et H et K deux sous-groupes de G .

- (a) Montrer que l'application de $G/H \cap K \rightarrow G/H \times G/K$ qui associe à tout $g(H \cap K)$ la paire (gH, gK) est une injection bien-définie.
- (b) Dédurre du point précédent que si $[G : H] < \infty$ et $[G : K] < \infty$ alors il en est de même pour $[G : H \cap K]$.

Exercice 10. Soit G un groupe et $H, K \leq G$ deux sous-groupes.

- (a) Rappeler pourquoi $H \cap K \leq G$.
- (b) Montrer que $HK \leq G$ si et seulement si $HK = KH$.
- (c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K \leq G$.
Indication : si $x \in H \setminus K$ et $y \in K \setminus H$, que peut-on dire de xy ?
- (d) Montrer que si H et K sont deux sous-groupes finis alors $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

4 Parties génératrices

Exercice 11 (Groupe symétrique).

- (a) Soit $c = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k) \in S_n$ un k -cycle. Montrer que $c = (i_1 \ i_2)(i_2 \ i_3) \cdots (i_{k-1} \ i_k)$.
- (b) Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ est un produit de transpositions de la forme $(i \ j)$, avec $i < j$ dans $\{1, \dots, n\}$.

- (c) Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $i < j - 1$, on a $(i \ j) = (j - 1 \ j)(i \ j - 1)(j - 1 \ j)$. En déduire que le groupe S_n est engendré par les transpositions $(i \ i + 1)$ avec $1 \leq i \leq n - 1$.
- (d) Montrer que S_n est engendré par deux éléments : le cycle $(1 \ 2 \ \dots \ n)$ et la transposition $(1 \ 2)$.

Exercice 12 (Groupe alterné).

- (a) Montrer que A_n est engendré par les 3-cycles.
- (b) Montrer que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n si $n \geq 5$.

Exercice 13 (Groupe diédral). On rappelle qu'on a défini le groupe diédral D_{2n} comme le sous-groupe de $\text{Sym}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong S_n$ qui préserve la relation R_n donnée par

$$\bar{i} R_n \bar{j} \iff \bar{i} = \bar{j} + \bar{1} \text{ ou } \bar{j} = \bar{i} + \bar{1}.$$

Le groupe D_{2n} est engendré par la rotation $r = (\bar{0} \ \bar{1} \ \dots \ \overline{n-1})$ et la symétrie axiale $s = (\bar{1} \ \overline{n-1})(\bar{2} \ \overline{n-2}) \dots$; r est d'ordre n et s est d'ordre 2. Enfin

$$D_{2n} = \left\{ s^i r^j : i \in \{0, 1\}; j \in \{0, \dots, n-1\} \right\},$$

et tous les éléments dans cette liste sont distincts (et ainsi $|D_{2n}| = 2n$).

- (a) Montrer la relation $rs = sr^{-1}$.
- (b) Montrer que tout élément qui n'est pas une rotation (*i.e.* pas une puissance de r) est d'ordre 2. En conclure que D_{2n} est engendré par deux éléments : s et sr , tous les deux d'ordre 2.

Exercice 14*. Soit G le groupe de symétries d'un cube. Montrer que $|G| = 48$ et que G n'est pas abélien.

5 Classes modulo un sous-groupe

Exercice 15. (a) Quelles sont les classes à gauche de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ modulo $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$? À droite?

- (b) Quelles sont les classes de $(\mathbb{Z}, +)$ modulo $(n\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 16. Soit $G := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ et soit $H \subseteq G$ défini par $H := \{(m, \bar{0}) : m \in \mathbb{Z}\}$.

- (a) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G .
- (b) Déterminer l'ensemble des classes à gauche de G modulo H .
- (c[†]) Plus généralement si $G = A \times B$ avec A et B deux groupes abéliens, montrer que $H := A \times \{e\}$ est distingué dans G et déterminer G/H .

Exercice 17. Soit $H = \{e, (1 \ 2)\} \subseteq S_3$.

- (a) Montrer que $H \leq S_3$.
- (b) Montrer que $S_3/H \neq H \setminus S_3$.
- (c) Montrer que $|S_3/H| = |H \setminus S_3|$ en les calculant explicitement.

Exercice 18[†]. Pour chaque cas, déterminer l'ensemble des classes à gauche modulo H de G . On pourra commencer par chercher à déterminer les éléments du sous-groupe H .

- (a) Soit $G = M_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ muni de l'addition matricielle et soit $H := \left\langle \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\rangle$.
- (b) Soit $G = GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ muni de la multiplication matricielle et $H := \left\langle \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\rangle$.

6 Exercices de synthèse

Exercice 19. On note par $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles pour la multiplication. Montrer que :

- (a) Pour $\bar{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\bar{k} \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ ssi $\text{pgcd}(k, n) = 1$. En particulier, $|(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times| = \phi(n)$, où ϕ est l'indicatrice d'Euler.
- (b) $((\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times, \cdot)$ est un groupe avec identité $\bar{1}$.
- (c) Appliquer le théorème de Lagrange pour déduire le théorème d'Euler : pour tout $n \geq 2$ et $a \in \mathbf{N}$, si $\text{pgcd}(a, n) = 1$, alors $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- (d) En déduire le petit théorème de Fermat : si p est premier et $a \in \mathbf{N}$, alors $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Exercice 20. Soit G un groupe fini, d'ordre n . Supposons que pour chaque d , G possède au plus d membres dont l'ordre divise d . Montrer que G est cyclique.

Pour cela, vous pouvez suivre les étapes suivantes :

- (a) Soit $x \in G$, disons $\text{ord}(x) = d$. Montrer que

$$\langle x \rangle = \{y \in G : \text{ord}(y) \mid d\}.$$

- (b) Pour chaque d , soit

$$\alpha(d) = |\{x \in G : \text{ord}(x) = d\}|.$$

Montrer que si $\alpha(d) > 0$ alors $d \mid n$ et $\alpha(d) = \varphi(d)$, où φ est l'indicatrice d'Euler que nous avons étudiée dans la fiche précédente.

- (c) Conclure, en comparant les deux sommes $\sum_{d \mid n} \alpha(d)$ et $\sum_{d \mid n} \varphi(d)$.

Exercice 21. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que si K est un corps et si $G \leq K^\times$ est un sous-groupe fini, alors G est cyclique.

Exercice 22. Montrer que pour p premier, $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times, \cdot) \cong (\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}, +)$.