
Notes de cours (en progrès)

Table des matières

1	Géométrie affine	2
1.1	Définition et propriétés générales	2
1.2	Sous-espaces affines	3
1.3	Parallélisme	4
1.4	Coordonnées affines	5
1.5	Applications affines	6
1.6	Groupe affine et points fixes	7
2	Géométrie euclidienne	9
2.1	Produits scalaires et espaces euclidiens	9
2.2	Orthogonalité	10

1 Géométrie affine

La théorie des espaces affines – ce que nous appellerons ici ‘géométrie affine’ – permet de décrire des ensembles de points munis d’une structure assez simple : essentiellement, le strict nécessaire pour pouvoir parler de parallélisme, d’alignement, d’intersection entre des droites et des plans, etc.

On peut définir de tels espaces de manière axiomatique : ce sont des ensembles de points et de droites tels que

- Deux points définissent une et une seule droite (passant par ces points).
- Par tout point hors d’une droite passe une unique droite parallèle.

Ce second axiome est parfois appelé ‘axiome de Playfair’ ; c’est une reformulation tardive du célèbre cinquième postulat énoncé dans les *Éléments* d’Euclide.

On pourrait alors montrer que ce parallélisme est une relation d’équivalence et enseigner la géométrie affine de cette manière élémentaire. Dans ce qui suit, nous allons toutefois suivre une voie plus algébrique, afin de mettre en lumière les liens en l’algèbre linéaire et la géométrie affine (notamment en dimension finie).

Notons que, dans ce chapitre, aucune notion de longueur d’un segment (ou de mesure d’un angle) n’est présente. Toutefois, on pourra exprimer le rapport entre les longueurs de deux segments parallèles. De même, on ne parlera pas d’orthogonalité. Ces notions se grefferont sur la structure d’espace affine par la suite de manière assez naturelle. Au-delà de cette description générale de la géométrie affine, ce qui est à retenir de ce chapitre est l’ensemble des opérations ‘licites’ dans de tels espaces.

1.1 Définition et propriétés générales

Un espace affine est un ensemble d’éléments tels que toute paire de ces éléments (appelés désormais ‘points’) définisse un unique vecteur (c’est-à-dire un élément d’un espace vectoriel), et de sorte que les vecteurs ainsi obtenus forment un espace vectoriel de manière naturelle. En d’autres termes, on veut pouvoir former le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir de tous deux points A et B , et on veut que ces points et ces vecteurs vérifient certaines relations fondamentales.

Plus précisément :

Définition 1 (Espace affine). *Considérons un ensemble $\mathcal{E}$, un espace vectoriel E , et une application θ qui associe un vecteur de E à toute paire de points de $\mathcal{E}$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

*On dit que $\mathcal{E}$ est un **espace affine dirigé par E** si, de plus :*

- *Pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

On donne communément le nom de Chasles à cette relation.

- *Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l’application θ_A*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\longrightarrow E \\ B &\mapsto \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

est une bijection.

Convention 1. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés **points** ; on les notera généralement à l'aide de lettres majuscules. Les éléments de E sont appelés **vecteurs** ; on les notera généralement soit à l'aide de lettres minuscules surmontées de flèches ($\vec{u}, \vec{v}$).

Fixons un point A ; pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Inversement, pour tous deux points A, B , il existe un unique vecteur $\vec{u} = \theta_A(B)$. On introduit alors les notations suivantes :

$$B = A + \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} = B - A.$$

On peut donc additionner un point et un vecteur, ou encore deux vecteurs ; les combinaisons de telles additions sont associatives et fonctionnent comme on s'y attend, en vertu de la relation de Chasles. On peut également former la différence entre deux points (c'est l'unique vecteur envoyant le premier sur le second), mais pas leur somme. Parler de soustraction est pratique mais pas tout à fait exact : c'est une opération qui ne reste pas dans l'ensemble des points, mais qui pointe vers un tout autre type d'objet.

Notons qu'on a toujours les égalités suivantes, principalement à cause de la relation de Chasles :

- $\forall A \in \mathcal{E}, \vec{0}_E = \overrightarrow{AA}$.
- $\forall A, B \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Remarque 1 (Lien entre espace vectoriel et espace affine). En fixant n'importe quel point A d'un espace affine $\mathcal{E}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ pointant vers tous les autres points de cet espace génère l'espace vectoriel E . Cette remarque permet de transporter la structure d'espace vectoriel de E sur $\mathcal{E}$ en choisissant (arbitrairement) A comme origine : il suffit de définir l'addition $M + N = Q$ lorsque

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AQ}$$

On appelle cet espace le **vectorialisé** $\mathcal{E}_A$. Notons que la structure de l'espace vectoriel en question dépend du choix de ce point A .

Inversement, tout espace vectoriel E est automatiquement un espace affine. En effet, il suffit d'associer à deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$. Cette identification d'un espace vectoriel à un espace affine est naturelle en ce qu'elle ne dépend pas d'un choix arbitraire, contrairement au cas inverse.

Théorème 1 (Règle du parallélogramme). Soit A, A', B, B' quatre points d'un espace affine. On a l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \iff \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Remarque 2. Lorsqu'une de ces égalités est vérifiée, on appelle $ABB'A'$ un parallélogramme. En définissant le **milieu** I de deux points A, B comme l'unique point vérifiant $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, on peut également montrer que ce quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si le milieu de A et B' coïncide avec le milieu de A' et B .

1.2 Sous-espaces affines

Un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est, moralement, un sous-espace vectoriel de E dont on a déplacé l'origine sur un point de $\mathcal{E}$. Plus précisément :

Définition 2. Un ensemble $F \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si il existe un point $A \in \mathcal{F}$ tel que l'ensemble de vecteurs

$$F = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in \mathcal{F}\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

On écrira parfois :

$$\mathcal{F} = A + F.$$

On parle du sous-espace affine passant par A et dirigé par F (ou $\vec{F}$, si l'on veut vraiment insister sur le fait que A et F sont des objets de natures différentes).

Notons qu'un espace affine ne peut donc pas être vide, car l'espace vectoriel F contient nécessairement le vecteur nul $\vec{0}_E$ et par conséquent le point $A + \text{vec}0_E \in \mathcal{F}$. Inversement, tout singleton dans $\mathcal{E}$ en est un sous-espace affine. Dans le cas de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces affines non-triviaux sont les droites et les plans (sans pour autant qu'ils ne passent pas l'origine nécessairement).

Définition 3. On appellera **dimension** d'un sous-espace affine la dimension du sous-espace vectoriel qui le dirige. Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ étant donnés, on a les propriétés naturelles suivantes :

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \implies \dim \mathcal{F} \leq \dim \mathcal{F}', \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \text{ et } \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}' \implies \mathcal{F} = \mathcal{F}'.$$

On a le résultat d'existence important suivant :

Théorème 2. Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ et pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$, il existe un unique sous-espace affine dirigé par F et passant par A .

Remarquons que cet espace affine reste le même si l'on remplace A par un point A' de la forme $A + \vec{u}$, où $\vec{u} \in F$. Un exemple crucial de sous-espace affine est celui décrit par le résultat suivant :

Théorème 3. Soit E' un second espace vectoriel et $f : E \longrightarrow E'$ une application linéaire de E vers E' . Pour tout $v \in f(E)$, l'ensemble $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E , de direction $\text{Ker} f$.

Ce résultat implique que les solutions d'un système linéaire dont le second membre n'est pas nécessairement nul est un espace affine ; on peut décrire ces solutions comme la somme d'une solution particulière et de l'espace (vectoriel) des solutions du système homogène associé (c'est-à-dire, celui dont le second membre est annulé). Cette interprétation s'étend aux solutions d'équations différentielles linéaires.

Si les sous-espaces affines sont largement analogues aux sous-espaces vectoriels, il faut se méfier et ne pas transporter les énoncés d'un objet à l'autre sans réfléchir. Par exemple, l'intersection de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel est toujours un autre sous-espace vectoriel (possiblement réduit au singleton $\{\vec{0}_E\}$). Dans le cas des espaces affines, il faut prendre davantage de précautions :

Théorème 4. Toute intersection de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine.

En particulier, ce résultat permet de définir l'**espace affine engendré par une partie** $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$: c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{A}$. Le concept suivant nous permet de préciser les cas où de telles intersections ne sont pas vides, et mettre en perspective les résultats donnés ci-dessus.

1.3 Parallélisme

Définition 4. Deux sous-espaces affines sont **parallèles** lorsqu'ils sont dirigés par le même sous-espace vectoriel.

Reprenons l'exemple d'un sous-espace affine obtenu comme la pré-image d'un vecteur $f^{-1}(v)$, où $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Alors tous les sous-espaces affines ainsi formés sont parallèles, car ils sont tous dirigés par $\text{Ker} f$.

Prenons par exemple une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à chaque point de coordonnées (x, y, z) associe le réel $ax + by + cz$ (où a, b, c sont trois réels quelconques, non tous nuls). Alors le noyau $\text{Ker} f$ consiste en l'ensemble des points de l'espace satisfaisant l'équation linéaire

$$ax + by + cz = 0.$$

C'est, comme on sait, l'équation d'un plan vectoriel P (c'est-à-dire, passant par l'origine).

Considérons maintenant les ensembles $P_d = f^{-1}(d)$, pour tout $d \in \mathbb{R}$. Ce sont, en vertu de ce qui précède, des plans affines parallèles à P (notons que $P = P_0$). De fait, pour un d fixé arbitraire, les points de P_d sont les points satisfaisant **l'équation cartésienne**

$$ax + by + cz = d.$$

On vérifie sans peine que cet ensemble de points peut être décrit comme la somme d'un point quelconque de ce plan (par exemple, $(\frac{d}{a}, 0, 0)$, en supposant $a \neq 0$), et du plan vectoriel P_0 .

Remarque 3. *Notons également que l'existence de sous-espaces affines passant par un point donné et dirigé par un sous-espace vectoriel donné permet de retrouver le postulat des parallèles (ou axiome de Playfair) sous sa forme générale dans ce cadre affine.*

Cette notion de parallélisme est également une relation d'équivalence. Elle permet de préciser la propriété d'intersection évoquée ci-dessus :

Théorème 5. *Si deux sous-espaces affines $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}$ sont parallèles, alors ils sont soit égaux, soit disjoints.*

1.4 Coordonnées affines

On souhaite désormais obtenir des outils algébriques pour pouvoir situer et décrire les objets de notre géométrie, et éventuellement mesurer des rapports de longueur. Pour cela, on introduit l'équivalent affine aux systèmes de coordonnées que fournissent les bases des espaces vectoriels. Dans ce qui suit, on fixe $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, d'espace vectoriel directeur E .

Une famille de vecteurs vivant dans un espace vectoriel génère un sous-espace vectoriel. On peut introduire la notion analogue suivante dans le cadre affine :

Définition 5. *Soit $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}$ une partie d'un espace affine. On appelle **sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{X}$** l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{X}$. C'est également le plus petit sous-espace affine (pour l'inclusion) de $\mathcal{E}$ contenant cette partie.*

Donnons nous maintenant $n+1$ points $A_0, A_1, \dots, A_p$ dans $\mathcal{E}$. Tout sous-espace affine contenant ces points contient A_0 , et est dirigé par le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$. Appelons ce sous-espace affine $\mathcal{F}$, et son sous-espace vectoriel directeur F . Un point M de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si il existe une famille de coefficients $(\alpha_i)_{i \in \{1 \dots p\}}$ tels que :

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_i \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

Il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ génère F ; si, de plus, ils forment une famille libre (et donc une base de F), alors on a nécessairement $p = \dim F$, on dit que la famille de points $A_0, \dots, A_p$ est **affinement libre**, et que c'est une **base affine** du sous-espace affine $\mathcal{F}$. Dans ce cas, les coefficients α_i décrits ci-dessus sont uniques, et on peut repérer tout point $M \in \mathcal{F}$ en les fixant ; ces sont les coordonnées affines de ce point.

En pratique, on décrit un repère affine d'un sous-espace affine de dimension p comme composé d'une origine (A_0) et de p vecteurs libres issus de A_0 (ce sont les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}$). Un repère requiert donc $p+1$ points, contrairement aux bases d'espaces vectoriels qui requièrent des vecteurs en nombre égal à la dimension de l'espace en question. Cette donnée supplémentaire correspond au choix de l'origine arbitraire du repère.

Un sous-espace affine $\mathcal{F}$ peut donc être décrit à l'aide d'un point A et d'une base $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ de son espace vectoriel directeur F :

$$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \sum \alpha_i \vec{u}_i\}$$

Ceci permet de décrire (par exemple) les plans affines de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (rapporté à un repère affine) d'une nouvelle manière. En effet, un tel plan affine passe par un point A de coordonnées (a, b, c) et est dirigé par un plan vectoriel engendré par deux vecteurs libres $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Alors, en vertu de l'énoncé général précédent, les points du plan affine en question ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x &= a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

où λ, μ sont deux paramètres réelles. On appelle cela **la représentation paramétrique** d'un plan affine. On récapitulera de manière systématique les équations cartésiennes et représentations paramétriques des principaux objets de la géométrie affine dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ plus loin dans ce cours.

1.5 Applications affines

La dernière notion que nous allons introduire est l'analogue affine des applications linéaires. On les définit d'abord comme des applications entre espaces affines préservant la structure de ces dernières. Là encore, l'intuition derrière cette définition quelque peu abstraite est qu'une application affine se décompose en une partie linéaire et en une partie fixe. Nous allons donc retravailler cette définition de sorte à rendre cette intuition plus nette. Plus précisément :

Définition 6. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines, dirigés respectivement par les espaces vectoriels E et E' . Une $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est une **application affine** de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ lorsqu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ (parfois noté $\vec{\varphi}$) vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = f(\overrightarrow{AB}).$$

On appelle f l'application linéaire associée à φ .

En fixant un point $O \in \mathcal{E}$ quelconque, et en écrivant le premier de ces deux vecteurs comme une différence entre deux points, on obtient la définition alternative suivante :

Définition 7. Une application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est une **application affine** lorsqu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow E'$ vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad \varphi(M) = \varphi(O) + f(\overrightarrow{OM}).$$

En d'autres termes, une application affine φ est uniquement déterminée par l'image d'un point fixé arbitraire (le point O ci-dessus) et une application linéaire f de E vers E' . De plus, ayant fixé ce point arbitraire, toute application affine s'écrit comme la somme de l'image (fixée) de ce point et d'une composante linéaire. On retrouve là la forme usuelle des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, qui s'écrivent matriciellement :

$$Y = AX + B$$

où $X \in \mathbb{R}^n$, $Y, B \in \mathbb{R}^p$, et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Ici, la matrice A représente l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ associée. Notons déjà deux cas particuliers : si $A = 0$, alors l'application φ est constante ; si $n = p$ et $A = I_n$, alors l'application φ est une translation. On verra par la suite de nombreux exemples d'applications affines, en particulier dans le cas du plan et de l'espace.

Les applications affines, en ce qu'elles se conforment à la structure des espaces affines, préservent les propriétés au cœur de cette géométrie. Plus précisément :

Théorème 6. Soit $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine, d'application linéaire associée f . Alors :

1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine dirigé par F , alors $\varphi(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine dirigé par $f(F)$ et $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par $f^{-1}(F)$.
2. Par conséquent, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_\infty$ sont deux sous-espaces affines parallèles, alors il en va de même pour $\varphi(\mathcal{F}_\infty)$ et $\varphi(\mathcal{F}_\infty)$.

On peut même aller plus loin et montrer que ces applications préservent l'alignement (voir exercices).

1.6 Groupe affine et points fixes

Dans le reste de cette section, on fixe un unique espace affine $\mathcal{E}$ et on s'intéresse à ses transformations affines – c'est-à-dire, à ses applications affines bijectives. En particulier, nous voulons identifier un groupe parmi celles-ci : pour ce faire, il faut d'une part étudier leurs compositions, et d'autre part, leur inversibilité.

Théorème 7. Soit φ, ψ deux applications affines de $\mathcal{E}$, d'applications linéaires associées f, g . Alors $\varphi \circ \psi$ est aussi une application affine, d'application linéaire associée $f \circ g$.

Cela découle directement de la composition des applications linéaires associées. Par ailleurs, on peut facilement caractériser les applications affines bijectives (et donc inversibles).

Théorème 8. Soit φ une application affine de $\mathcal{E}$, d'application linéaire associée f . Alors φ est bijective si et seulement si f l'est (de même pour l'injectivité et la bijectivité). On parle dans ce cas de **transformation affine**. Lorsque φ est bijective, elle transforme toute base affine de $\mathcal{E}$ en une autre base affine de $\mathcal{E}$, et sa réciproque φ^{-1} a pour application linéaire associée f^{-1} .

Là encore, penser au cas de $\mathbb{R}^n$ peut être utile pour former son intuition. L'application affine $X \longrightarrow AX + B$, où $A \in GL_n(\mathbb{R})$, a pour inverse l'application affine $Y \longrightarrow A^{-1}Y - A^{-1}B$.

Cela nous permet donc de définir le groupe suivant :

Définition 8. L'ensemble des transformations affines de $\mathcal{E}$ forme un groupe pour la composition, que l'on appelle **groupe affine de $\mathcal{E}$** et que l'on note $GA(\mathcal{E})$.

Dans la suite de ce cours, on étudiera la structure des groupes affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Concluons ce chapitre par une brève description du groupe $GA(\mathcal{E})$ dans le cas général. Nous avons déjà dit qu'une application affine dont l'application linéaire associée est l'identité est nécessairement une translation. Les translations ont pour particularité de ne fixer aucun point de $\mathcal{E}$. Or, on peut décrire facilement la nature des applications affines qui possèdent un point fixe. En effet, soit $O \in \mathcal{E}$ quelconque et f un automorphisme quelconque de E . Alors, l'écriture

$$\overrightarrow{O\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM}) \iff \varphi(M) = O + f(\overrightarrow{OM})$$

définit l'unique élément $\varphi \in GA(\mathcal{E})$ possédant f pour partie linéaire f et fixant le point O . On en déduit le résultat suivant :

Théorème 9. Soit $O \in \mathcal{E}$ fixé. Toute application affine $\varphi \in GA(\mathcal{E})$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\varphi = t_{\vec{u}} \circ \psi$$

où ψ est un élément de $GA(\mathcal{E})$ qui fixe O (possiblement l'identité).

En effet, si φ envoie O sur O' , il suffit de prendre ψ l'unique application affine ayant la partie linéaire que φ , et $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$.

Ce qu'il faut retenir à ce stade, et ce que nous mettrons en pratique dans l'étude des transformations affines du plan et de l'espace, c'est que s'interroger sur l'existence ou non de points fixes est généralement un bon moyen d'obtenir des informations quant à la nature géométrique de ladite transformation. Moralement, si une transformation affine admet un point fixe, alors il 'suffit' de vectorialiser l'espace affine en ce point et la transformation en question se comporte comme une application linéaire classique. Pour cela, on a le résultat suivant, souvent utile :

Théorème 10. *L'application φ a un point fixe si et seulement si f ne fixe aucun autre vecteur que 0_E ; c'est-à-dire, que l'endomorphisme $f - Id$ est inversible (ou encore, que 1 n'est pas valeur propre de f).*

En pratique, si une transformation affine est donnée sous la forme $AX + B$, cela signifie qu'on pourra étudier dans un premier temps et séparément la transformation linéaire A grâce aux méthodes de l'algèbre linéaire. Enfin, dans le cadre des bijections affines, on a l'important résultat suivant, qui s'appuie sur les remarques précédentes :

Théorème 11. *Soit $\varphi \in GA(\mathcal{E})$, d'application linéaire associée f . Supposons que*

$$E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \Im(f - Id).$$

Alors, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in E$ et une unique application affine $\psi \in GA(\mathcal{E})$ possédant un point fixe, tels que :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= \vec{u} \\ \varphi &= t_{\vec{u}} \circ \psi \end{aligned}$$

De plus, ψ et $t_{\vec{u}}$ commutent.

Prouvons ce théorème pour manipuler des écritures affines.

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{E}$ quelconque ; alors, de par la décomposition de E prise pour hypothèse, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \text{Ker}(f - Id)$ et un unique vecteur $\vec{v} \in E$ tels que :

$$\overrightarrow{O\varphi(O)} = \vec{u} + (f - Id)(\vec{v})$$

En particulier, $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

Considérons le point $A = O - \vec{v}$; c'est-à-dire, le point tel que $\overrightarrow{AO} = \vec{v}$. On remarque alors que :

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} = \vec{v} + \vec{u} + f(\vec{v}) - \vec{v} - f(\overrightarrow{OA}) = \vec{u}$$

Ainsi, en formant $\psi = t_{-\vec{u}} \circ \varphi$, on obtient une application affine fixant A de la forme souhaitée.

Supposons désormais qu'il existe une autre paire $(\vec{u}', \psi')$ satisfaisant la proposition ; notons A' le point fixé par ψ' . Alors

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} + \overrightarrow{\varphi(A')A'} = \vec{u} + f(\overrightarrow{AA'}) - \vec{u}'.$$

Il s'ensuit que $\overrightarrow{AA'}$ est dans l'image de $f - Id$; mais c'est également un élément de $\text{Ker}(f - Id)$, car ce vecteur peut se réécrire

$$A' - A - \psi(A) + \psi(A') = \vec{0}_E.$$

Au vu de l'hypothèse sur la décomposition de E en somme directe, ce vecteur est nécessairement nul. On a donc $\vec{u} = \vec{u}'$ et $\psi = \psi'$.

La commutativité des applications est laissée en exercice. □

2 Géométrie euclidienne

La géométrie euclidienne nous permet d'introduire un nouveau type de relation entre des sous-espaces (l'orthogonalité), et de mesurer des segments et des angles. Nous introduisons cela d'abord dans le cadre vectoriel, puis nous voyons comment cela se transporter au cadre affine.

2.1 Produits scalaires et espaces euclidiens

Définition 9. Soit E un espace vectoriel, $\psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifiant :

- $\forall x, y \in E, \quad \psi(x, y) = \psi(y, x).$
- $\forall x \in E, \quad \psi(x, x) \geq 0.$
- $\psi(x, x) = 0 \iff x = 0_E.$

On appelle un tel ψ un **produit scalaire** sur E , et (E, ψ) un **espace euclidien** (ou **préhilbertien** en dimension infinie).

Remarquons que la définie positivité et la bilinéaire impliquent que $\psi(x, 0_E) = \psi(0_E, x) = 0$ pour tout $x \in E$.

Corollaire 1. Si (E, ψ) est un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E , alors la restriction du produit scalaire ψ à F fait de ce dernier un espace euclidien à son tour.

On notera souvent le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in E$ d'une des manières suivantes : $\langle x, y \rangle, (x|y)$, ou encore $\vec{x} \cdot \vec{y}$ (lorsqu'il sera pertinent de distinguer des vecteurs de points, choix que nous allons privilégier dans ce qui suit).

Un exemple important à retenir est celui d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base quelconque de cet espace ; on appelle **matrice de ce produit scalaire** la matrice A dont les coefficients sont :

$$A_{i,j} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

On vérifie sans peine alors que le produit scalaire de deux vecteurs quelconques $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e}_i, \vec{y} = \sum_i y_i \vec{e}_i$ s'obtient en forme le produit matrice suivant :

$${}^t X A Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i y_j = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

où X, Y sont les vecteurs colonnes représentant ces vecteurs dans la base des $\vec{e}_i$. En particulier, des propriétés d'un produit scalaire on peut déduire le fait que la matrice A est symétrique et définie positive (c'est-à-dire, que $\text{sp } A \subset \mathbb{R}_+^*$). Réciproquement, cela donne un moyen pratique de vérifier qu'une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ définit bien un produit scalaire.

Un produit scalaire définit automatiquement une norme particulière sur l'espace euclidien auquel il s'applique.

Définition 10. Tout espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ possède une **norme euclidienne** définie par l'équation :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Tout espace euclidien forme donc un exemple naturel d'espace vectoriel normé. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une norme (et, en particulier, que cette forme vérifie l'inégalité triangulaire), on utilise souvent l'inégalité classique suivante :

Théorème 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien, alors

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

Tout produit scalaire définit une norme ; la réciproque est en revanche fausse. Pour voir cela, commençons par établir l'identité dite 'du parallélogramme' dans le cas d'une norme euclidienne (un dessin peut aider à comprendre cette appellation) :

Théorème 13. Soit $(E, \cdot)$ un espace euclidien, alors

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Démonstration. On écrit les normes de $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ à l'aide du produit scalaire associé à cette norme, puis on utilise la bilinéarité et la symétrie de ce dernier :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

En remplaçant les produits scalaires restants par normes, on a l'égalité souhaitée. $\square$

Considérons désormais la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$, définie par

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Cette norme ne satisfait pas l'égalité du parallélogramme, ce que l'on peut vérifier en prenant par exemple les vecteurs $\vec{u} = (2, 2)$ et $\vec{v} = (1, -1)$. En effet, les normes de ces vecteurs sont (respectivement) 2 et 1, mais les normes de leur somme et de leur différent sont toutes deux 3 ; hors, $2(4 + 1) = 10 \neq 9 + 9$. Cette norme ne peut donc pas provenir d'un produit scalaire.

Cependant, toutes les normes qui vérifient l'égalité du parallélogramme définissent un produit scalaire par **l'identité de polarisation** suivante, obtenue en décomposant linéairement le produit scalaire $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

C'est bien sûr là une propriété également valable pour tout produit scalaire.

Nous venons de voir qu'un produit scalaire définit une norme, c'est-à-dire qu'il permet de mesurer des vecteurs d'un espace. De la même manière, dans $\mathbb{R}^n$, cela permet de mesurer l'angle θ formé par deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ via l'égalité suivante (rendue possible par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

2.2 Orthogonalité

En plus de permettre la mesure de segments et d'angles, la géométrie euclidienne permet d'introduire une relation particulièrement importante entre sous-espaces : l'orthogonalité. Comme nous le verrons, celle-ci n'est pas sans lien avec les mesures susmentionnées.

Définition 11. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs dans un espace euclidien $(E, \cdot)$. On dit qu'ils sont **orthogonaux** lorsqu'on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de $(E, \cdot)$, alors qu'ils sont **orthogonaux** lorsqu'on a :

$$\forall \vec{u} \in F, \forall \vec{v} \in G, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Remarquons que deux vecteurs sont perpendiculaires lorsqu'ils forment un angle congru à $\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ en vertu de la définition de l'angle formé par deux vecteurs donnée ci-dessus.

Définition 12. Soit F une partie (non-vide) de E , alors on appelle **orthogonal de F** l'ensemble

$$F^\perp = \{\vec{u} \in E \mid \forall \vec{v} \in F, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

On utilisera le plus souvent cette définition pour F un sous-espace vectoriel de E , auquel cas on :

Corollaire 2. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors il en va de même pour $F^\perp$.

On a les inclusions suivantes, qu'il faut savoir démontrer (ce sont de bons exercices) :

Théorème 14. Soit F, G deux sous-espaces vectoriel de l'espace euclidien E . Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$. De plus, **en dimension finie**, on a les résultats suivants :

- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$, et $E = F \oplus F^\perp$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Retournons enfin au cadre d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par un espace vectoriel E , et supposons que cet espace vectoriel est un espace euclidien – c'est-à-dire, qu'il est pourvu d'un produit scalaire. On appellera alors $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, et on peut appliquer les outils de la géométrie euclidienne à l'espace affine en question. En particulier, on peut mesurer la longueur d'un segment affine via la norme du vecteur formé par ses extrémités, grâce à la définition suivante :

Définition 13. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, dirigé par l'espace vectoriel euclidien $(E, \cdot)$. Alors l'application

$$d : \begin{cases} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (a, b) \mapsto \|\vec{ab}\| \end{cases}$$

définit une **distance** sur $\mathcal{E}$ (où $\|\vec{u}\|$ représente la norme euclidienne associée au produit scalaire de E).

On peut ainsi mesurer la distance entre deux points A et B d'un espace affine, et donc la longueur AB du segment qu'ils définissent. On retrouve alors, par exemple, la célèbre relation d'al-Kashi entre les longueurs des côtés d'un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

On pourra également mesurer la distance entre des sous-espaces affines (par exemple, la distance d'une droite à un plan) et réaliser des calculs de telles distances à l'aide de projections orthogonales. Nous définirons cela plus soigneusement plus loin dans ce cours.

Enfin, la notion d'orthogonalité se transporte naturellement aux espaces affines.

Définition 14. On dira que deux sous-espaces affines (c'est-à-dire, des droites affines, des plans affines, etc.) sont **orthogonaux** lorsque les sous-espaces vectoriels les dirigeant le sont. Il faut noter, toutefois, que l'intersection de ces sous-espaces affines peut être vide (contrairement à celle de sous-espaces vectoriels). On dira que deux sous-espaces affines sont **perpendiculaires** lorsqu'ils sont orthogonaux et que leur intersection n'est pas vide.