Université Claude Bernard - Lyon 1 Nicolas Michel
MAT3175L - Préparation aux écrits du CAPES Automne 2026

FICHE 5

Géométrie de l'espace

Exercice 1. Soit D et D' deux droites non-parallèles de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ non-parallèles. Déterminer l'ensemble des milieux I des segments $[AB]$, où A décrit D et B décrit D'.

Exercice 2. Désormais, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P d'équation

$$2x + y - 2z + 4 = 0,$$

et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$, et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan, et que ce plan est bien le plan P.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
3. Donner un système d'équations paramétrisant la droite Δ passant par le point O et perpendiculaire au plan P.
4. Déterminer le projeté orthogonal de O sur P, puis la distance entre ce point et ce plan.
5. Calculer le volume du tétraède $OABC$.

Exercice 3. Pour chacune des équations ci-dessous, décrire la région de l'espace constituée des vecteurs solutions $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (où $x, y, z \in \mathbb{R}$) :

1. $\vec{r} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$,
2. $\vec{r} \cdot \vec{i} = \lambda$,
3. $\|\vec{r} - \vec{i}\| = \|\vec{r} - \vec{j}\|$,
4. $\|\vec{r} - \vec{i}\| = \lambda$,
5. $\vec{r} \cdot \vec{i} = \vec{r} \cdot \vec{j} = \vec{r} \cdot \vec{k}$,
6. $\vec{r} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

On discutera en fonction de la valeur du paramètre réel λ.

Exercice 4. Démontrer que, pour tous trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, on a :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

Soit A, B, C trois points deux-à-deux distincts de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$. À l'aide de la formule démontrée précédemment, déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = 0.$$

Exercice 5. On considère dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ un tétraèdre $OABC$ tel que les triangles OAB, OAC, et OCB soient tous trois rectangles en O. On fixe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = b\vec{j}, \quad \overrightarrow{OC} = c\vec{k},$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier brièvement le fait qu'un tel repère existe.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par A, B et C.
3. Déterminer l'aire de ABC en formant un produit vectoriel.
4. Déterminer l'aire de ABC en calculant le volume du tétraèdre.
5. En déduire le résultat suivant, que l'on interprétera comme un analogue du théorème de Pythagore :

$$\mathcal{A}_{ABC}^2 = \mathcal{A}_{OAB}^2 + \mathcal{A}_{OAC}^2 + \mathcal{A}_{OBC}^2.$$

Exercice 6. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des isométries affines définies par les systèmes d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} x' = z + 1 \\ y' = x - 1 \\ z' = y \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x' = x - 2y - 2z + 9 \\ 3y' = -2x + y - 2z + 9 \\ 3z' = -2x - 2y + z \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = z + 3 \\ y' = y - 2 \\ z' = -x + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = -x + 3. \\ z' = -y + 2 \end{cases}$$