Université Claude Bernard - Lyon 1 Nicolas Michel
MAT3175L - Préparation aux écrits du CAPES Automne 2026

FICHE 4

Géométrie plane

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{C}$ et l'on pose $\omega = 2^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = \omega+\omega^2+\omega^4$ et $v = \omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1. En identifiant le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, décrire la position des points A_k d'affixes respectives ω^k pour $k \in \{0, \dots, 6\}$. Quelle figure géométrique reconnaît-on ?

2. Montrer que $u + v = -1$ et que $uv = 2$.

3. En utilisant les relations coefficients-racines, former un polynôme du second degré dont u et v sont les racines, et montrer que que
$$u = \overline{v} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

4. En utilisant les relations coefficients-racines, montrer que $\omega, \omega^2, \omega^4$ sont les trois racines du polynôme $P(Z) = Z^3 - uZ^2 + vZ - 1$.

5. En multipliant $P(Z)$ par $\overline{Z}$, montrer que ω, ω^2, et ω^4 sont aussi solutions de l'équation :
$$Z^2 - uZ + v - \overline{Z} = 0. \quad \text{(E)}$$
Vérifier que u en est également une solution.

6. On considère désormais l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation :
$$X^2 - Y^2 - \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{7}}{2}Y = \frac{1}{2}. \quad \text{(H)}$$
En remarquant que l'équation (H) s'obtient par passage à la partie réelle dans l'équation (E), montrer que (H) passe par les points A_0, A_1, A_2, A_4, ainsi que le point U d'affixe u.

7. En écrivant (H) sous forme réduite
$$(X - a)^2 - (Y - b)^2 = c$$
où a, b, c sont trois réels à déterminer, identifier le centre et les asymptotes de cette hyperbole. Produire un croquis sur lequel figurent $\mathcal{H}$, le point U, et les points A_k.

8. Montrer que U est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_4$, c'est-à-dire l'intersection de ses trois hauteurs.

Exercice 2. Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$ une suite d'affixes du plan complexe. En notant $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$, on définit par récurrence :
$$Z_0 = Z, \quad \text{et} \quad Z_{k+1} = (\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2}).$$

1. Déterminer l'unique application linéaire $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\varphi(Z_k) = Z_{k+1}.$$
Donner sa forme matricielle dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

2. Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et considérons les n vecteurs non-nuls
$$u_s = \begin{pmatrix} w^s \\ w^{2s} \\ \vdots \\ w^{ns} \end{pmatrix}, \quad s \in \{0, \dots, n-1\}.$$
Montrer que pour tout $s \in \{0, \dots, n-1\}$, $\varphi(u_s) = \frac{1+\omega^s}{2} u_s$. En déduire que φ est diagonalisable.

3. Montrer que la base de vecteurs propres construite ci-dessus est orthonormée pour le produit scalaire hermitien canonique, à savoir :
$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v_i}.$$
En déduire que la première composante de Z dans cette base est $g = \frac{1}{n}(z_1 + \dots z_n)$, l'affixe de l'isobarycentre des points d'affixes z_1, …, z_n.

4. Montrer que, pour tout $s \neq 0$,
$$\left| \frac{1 + \omega^s}{2} \right| < 1.$$

5. Montrer que la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge le n-uplet $(g, \dots, g)$.

Exercice 3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des isométries affines définies par les systèmes d'équations ci-dessous :
$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{5}(3x - 4y + 10) \\ y' &= \frac{1}{5}(4x + 3y) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' &= \frac{1}{5}(3x + 4y - 2) \\ y' &= \frac{1}{5}(4x - 3y + 4) \end{cases}, \quad \begin{cases} x' &= \frac{1}{5}(3x + 4y + 8) \\ y' &= \frac{1}{5}(4x - 3y + 9) \end{cases}.$$