Université Claude Bernard - Lyon 1 Nicolas Michel
MAT3175L - Préparation aux écrits du CAPES Automne 2026

FICHE 3

PROJECTIONS ET SYMÉTRIES ORTHOGONALES

CALCULS PRATIQUES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Dans ce qui suit, on se place d'abord dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation cartésienne

$$ax + by + c = 0$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$. Elle est dirigée par la droite vectorielle $D = \text{Vect}(-b, a)$, dont l'orthogonal est $D^\perp = \text{Vect}(a, b)$. On notera $\vec{u}$ le vecteur directeur normalisé de $\mathcal{D}$, et $\vec{n}$ son vecteur orthogonal normalisé.

Soit $M = (x, y)$ un point quelconque du plan. Son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ est l'unique point M' vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} M' \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MM'} \in D^\perp. \end{cases}$$

En d'autres termes, les coordonnées (x', y') de ce point vérifient :

$$\begin{cases} ax' + by' + c = 0 \\ \begin{vmatrix} a & x' - x \\ b & y' - y \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

On peut déterminer, à partir de ces équations, l'application correspond à cette projection orthogonale.

En supposant par exemple que $b \neq 0$, la seconde condition donne $x' = x + \frac{a(y'-y)}{b}$, d'où l'on en déduit que

$$abx + a^2(y' - y) + b^2y' + bc = 0$$

Si $a = 0$ (la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire, d'abscisse $\frac{-c}{b}$), il s'ensuit que $y' = -\frac{c}{b}$, et $x' = x$. Si $a \neq 0$, l'équation précédente donne y' sous la forme d'une expression linéaire (non-homogène) en x et y ; en la substituant dans l'équation générale de $\mathcal{D}$, on peut également déterminer x' comme expression linéaire (non-homogène) en x et y. Cela fournit un système de deux équations qui définit l'application affine qu'est la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$.

Exercice 1. Déterminer l'application affine correspondant à la projection orthogonale sur la droite d'équation

$$3x - y + 2 = 0.$$

On peut également exprimer la projection orthogonale de manière vectorielle. Fixons un point A sur la droite $\mathcal{D}$, et cherchons le projeté orthogonal M' de M. D'après les résultats généraux sur les dimensions des espaces orthogonaux, on sait que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ forment une base (orthonormée) de $\mathbb{R}^2$; on peut donc y exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$; c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{n}$. Or, par la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$.

A et M' étant deux points de la droite $\mathcal{D}$, et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étant dans $D^\perp$, on en déduit que ces deux décompositions du vecteur $\overrightarrow{AM}$ coïncident. Le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ est donc la composante selon $\vec{u}$ du vecteur $\overrightarrow{AM}$, exprimée dans une base orthonormée. En formant les produits scalaires de $\overrightarrow{AM}$ avec les vecteurs de cette base, on obtient l'écriture alternative (à retenir) :

$$\overrightarrow{AM'} = < \overrightarrow{AM}, \vec{u} > \vec{u}.$$

On notera que le point A est arbitraire (pourvu qu'il soit sur la droite $\mathcal{D}$; il sera parfois judicieux de prendre l'origine, ou un autre point particulier en fonction de ce que l'on cherche à montrer).

Exercice 2. Faire un dessin représentant les vecteurs mentionnées ci-dessus, et donner la formule alternative dans le cas où l'on n'a pas normalisé les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Savoir calculer des projections est très utile lorsque l'on cherche à déterminer des distances. En effet, pour tout point P du plan, on a le résultat suivant :

$$d(P, \mathcal{D}) = \min_{M \in \mathcal{D}} d(P, M) = d(P, P')$$

où P' est le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$.

Exercice 3. Calculer la distance du point $P = (4, 4)$ à la droite d'équation

$$3x - y + 2 = 0.$$

Ces résultats s'étendent naturellement aux symétries orthogonales du plan, par rapport à la même droite affine $\mathcal{D}$. Le symétrique du point M est l'unique point M' vérifiant

$$\begin{cases} I \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MM'} \in D^\perp \end{cases}$$

où I est le milieu de $\mathcal{D}$.

Exercice 4. En suivant le modèle de ce qui a été fait pour les projections orthogonales ci-dessus, déterminer l'expression algébrique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d'équation

$$3x - y + 2 = 0.$$

Fixons à nouveau un point A sur $\mathcal{D}$. Montrer que l'expression vectorielle du symétrique orthogonale M' de M est :

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - 2 < \overrightarrow{AM}, \vec{n} > \vec{n}.$$

Là encore, on donnera une formule alternative pour le cas où le vecteur $\vec{n}$ n'est pas normalisé.

Généralisons ceci au cas de l'espace de dimension 3. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $(a, b, c) \neq 0$. Il est dirigé par le plan vectoriel $P = \text{Vect}((-b, a, 0), (-c, 0, a))$ (dans le cas où $a \neq 0$), et il est orthogonal à la droite vectorielle $P^\perp = \text{Vect}(a, b, c)$. On notera $\beta = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de P, et $\vec{n}$ un vecteur normalisé dirigeant $P^\perp$.
Soit $M = (x, y, z)$ un point quelconque du plan. Son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ est l'unique point M' vérifiant :

$$\begin{cases} M' \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{MM'} \in P^\perp \end{cases}$$

Exercice 5. Réécrire ces conditions sous la forme d'équations algébriques, puis en déduire l'expression de la projection orthogonale sur le plan d'équation

$$2x - y - 3z + 1 = 0.$$

On peut également exprimer la projection orthogonale de manière vectorielle. Fixons un point A sur le plan $\mathcal{P}$, et cherchons le projeté orthogonal M' de M. D'après les résultats généraux sur les dimensions des espaces orthogonaux, on sait que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$ forment une base (orthonormée) de $\mathbb{R}^3$; on peut donc y exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$; c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{n}$. Or, par la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$.
A et M' étant deux points du plan $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (car ces deux vecteurs forment une base orthonormée de P). On en déduit que $\overrightarrow{MM'} = \gamma\vec{n}$. En calculant les produits scalaires avec les vecteurs de la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ susmentionnée, on en déduit que :

$$\overrightarrow{AM'} = < \overrightarrow{AM}, \vec{u} > \vec{u} + < \overrightarrow{AM}, \vec{v} > \vec{v}.$$

Là encore, le point A est arbitraire (parmi tous les points de $\mathcal{P}$), et calculer le projeté permet de calculer des distances entre points et plans affines.

Exercice 6. Justifier les affirmations énoncées ci-dessus, puis calculer le projeté (orthogonal) du point $(1, 1, 1)$ sur le plan d'équation

$$2x - y - 3z + 1 = 0.$$

On peut noter au passage que le projeté orthogonal peut également s'exprimer à l'aide du vecteur normal, plutôt qu'à l'aide des deux vecteurs de la base de P.

Exercice 7. Montrer qu'on peut définir le projeté orthogonal à l'aide de l'équation vectorielle suivante (équivalente à celle donnée plus haut) :

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - < \overrightarrow{AM}, \vec{n} > \vec{n}.$$

Enfin, la symétrie orthogonale par rapport au plan affine $\mathcal{P}$ se généralise de la même manière.
Soit $M = (x, y, z)$ un point quelconque du plan. Son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$ est l'unique point M' vérifiant :

$$\begin{cases} I \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{MM'} \in P^\perp \end{cases}$$

où I est le milieu de M et M'.

Exercice 8. Fixons à nouveau un point $A \in \mathcal{P}$. Montrer que le symétrique M' d'un point M est l'unique point vérifiant l'équation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} - 2 < \overrightarrow{AM}, \vec{n} > \vec{n}.$$

On donnera là aussi une formule généralisée au cas où $\vec{n}$ n'est pas normalisé.