Université Claude Bernard - Lyon 1 Nicolas Michel
MAT3175L - Préparation aux écrits du CAPES Automne 2026

FICHE 2

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Exercice 1 (Figures euclidiennes usuelles)**.** Soit A et B deux points distincts du plan et $k \in \mathbb{R}$. Déterminez, selon les valeurs de k, les ensembles des points M tels que :

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.
2. $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$.
3. $MA = k \cdot MB$.
4. $MA + MB = k$.
5. $MA^2 + MB^2 = k$.
6. $|MA^2 - MB^2| = k$.

Exercice 2 (Repères affines et isométries)**.** 1. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, dont on prend trois points non alignés A, B, C. Soit A', B', C' trois points de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$A'B' = AB, \quad B'C' = BC, \quad C'A' = CA.$$

Montrer que A', B', C' ne sont pas alignés et qu'il existe une unique isométrie (affine) de $\mathcal{A}$ qui envoie A sur A', B sur B', C sur C'.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, dont on se donne une base affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$. Soit $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ une famille de $n+1$ points de $\mathcal{E}$ vérifiant $A_iA_j = B_iB_j$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ est une base affine de $\mathcal{E}$, et qu'il existe une unique isométrie affine envoyant chaque A_i vers B_i.

Exercice 3 (Orthocentre d'un triangle)**.** Soit p, q, r, s quatre points du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ (qu'on identifie aux vecteurs issus de l'origine). Montrez que la droite passant par p et q est perpendiculaire à celle passant par r et s si et seulement si

$$(p|r) + (q|s) = (p|s) + (q|r)$$

Soit p, q, r trois points de $\mathbb{R}^2$. On appelle *hauteurs* du triangle pqr les droites passant par chacun de ces points et normales à la droite passant par les deux autres. Montrez que les trois hauteurs d'un triangle sont des droites concourantes.

Exercice 4. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces affines suivants :

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(2,1,1,-1)),$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 0 \text{ et } -x + 2y + 3z - t = 0\}.$$

Déterminer une base des orthogonaux de ces sous-espaces, ainsi qu'un système d'équations déterminant $G^\perp$.

Exercice 5. Soit $(E, |)$ un espace euclidien, on dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque l'on a :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = k \cdot \|x\|.$$

1. Montrer que, pour tous $u, v \in E$, on a :

$$(u + v \mid u - v) = 0 \Longrightarrow \|u\| = \|v\|.$$

2. Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude de rapport k si et seulement si :

$$\forall u, v \in E, \quad (f(u) \mid f(v)) = k^2 \cdot (u \mid v).$$

3. Démontrer que f est une similitude si et seulement si f est non-nulle et préserve l'orthogonalité.
Indication : on pourra faire intervenir une base orthonormée de E.

Exercice 6. Soit u et v deux vecteurs orthogonaux et de norme 1 dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$f(x) = x - (x \mid u + v) \cdot u - (x \mid v - u) \cdot v$$

Montrer que f définit bien une isométrie vectorielle, dont on donnera la matrice dans une base orthonormée bien choisie. Quelle est sa nature géométrique ?

Exercice 7 (Sur les projections)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, dirigé par l'espace euclidien $(E, \cdot)$. Soit F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimensions respectives k et $n - k$.

1. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, montrer qu'il existe un unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$, et que ce point est l'intersection de $\mathcal{F}$ avec le sous-espace affine $M+G$. On l'appelle **projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G**.

2. Montrer que l'application $\pi_{\mathcal{F},G} = \pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui à tout M associe ce projeté est une application affine dont l'application linéaire associée est $p_{F,G}$, la projection (vectorielle) sur F parallèlement à G.

3. Montrer que $\pi \circ \pi = \pi$, et que l'ensemble des points fixes de π est $\mathcal{F}$.

4. On suppose désormais que G est orthogonal à F. Montrer qu'il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ contenant M et orthogonal à $\mathcal{F}$, et un unique point d'intersection $N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$; on l'appelle **projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$**.

5. Vérifier que l'application qui associe à tout M ce projeté orthogonal n'est autre que $p_{\mathcal{F},F^\perp}$.

6. Soit $A \in \mathcal{F}$; montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

   - A est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$,
   - $\forall B \in \mathcal{F}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$,
   - $\forall B \in \mathcal{F}, \quad AM \leq AB$,
   - $\forall B \in \mathcal{F} - \{A\}, \quad AM < AB$.

   On appelle **distance de M à $\mathcal{F}$** la longueur de ce segment AM.

7. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^4$, calculer la distance de $(1,-1,0,0)$ au sous-espace affine d'équation :
$$x + y - z - t = 1.$$

Exercice 8 (Gram-Schmidt)**.** 1. Soit $\omega : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue 'poids' fixée, où I est un segment inclus dans $\mathbb{R}$. Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit
$$\varphi_\omega(P,Q) = \int_I \omega(t)P(t)Q(t)dt$$
Justifier le fait que cette fonction est bien définie, et montrer qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Appliquer le processus de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ pour la fonction poids $w : x \in [-1,1] \mapsto 1$.

3. Déterminer les orthogonaux des ensembles suivants : $\{1\}, \{1, X\}, \{1, X^2\}$.

4. Calculer le projeté orthogonal de $1 + X + X^2$ sur l'hyperplan vectoriel
$$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}.$$
puis sur l'hyperplan affine $\mathcal{H} = X + H$. Interpréter ce résultat en terme de distances.

Exercice 9 (Déterminants de Gram)**.** Soit $(E, |)$ un espace euclidien. Pour tous $x_1, \ldots, x_p$ vecteurs de E, on appelle **matrice de Gram** associée à ces vecteurs la matrice symétrique $M(x_1, \ldots, x_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de coefficient général $(x_i \mid x_j)$ (pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. On note
$$G(x_1, \ldots, x_p) = \det(M(x_1, \ldots, x_p))$$
le **déterminant de Gram** de ces vecteurs.

1. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_p) \neq 0$.

2. Supposons que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre, qui engendre le sous-espace vectoriel F (de dimension p). Montrer que :
$$\forall x \in E, \quad d(x,F)^2 = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_p)}{G(x_1, \ldots, x_p)}.$$
Indication : On pourra décomposer x sur $E = F \oplus F^\perp$.